Elementos de Astrofísica Teórica

Práctica 7: Cosmología Newtoniana

Introducción Breve: Si bien hoy se sabe que la teoría gravitatoria de Newton no es apropiada para analizar la dinámica del universo, la teoría newtoniana permite obtener las mismas ecuaciones (ecs. de Friedmann) que la relatividad general para la evolución de un universo homogéneo e isotrópico (a t fijo, y $\forall t$). Es por esto que el estudio de la dinámica del universo en el contexto de la teoría de Newton resulta interesante.

Para estudiar el movimiento del universo suelen definirse las llamadas coordenadas comoviles $\vec{r_0}$, las cuales se mueven junto con el fluido (que representa a la materia/energía del universo) y que, por lo tanto, asignan un único valor a cada elemento de fluido *durante toda la evolución.* Estas coordenadas se relacionan con las coordenadas espaciales $\vec{r}$ mediante el llamado factor de escala a, que describe los cambios de tamaño del universo, según $\vec{r} = a_{(t)}\vec{r_0}$. De esta última ecuación, tomando la derivada respecto al tiempo, se obtiene la llamada 'Ley de Hubble' y se encuentra que el factor de escala se relaciona con la llamada constante de Hubble H_0 mediante: $H_0 = \dot{a}_{\rm hoy}/a_{\rm hoy}$. Para un universo de 'polvo' (materia fría) es posible obtener (tal como se hizo en la teoría) la ecuación que determina la evolución de a utilizando la conservación de la masa, la ecuación de Euler para el fluido y la ecuación de Poisson para el campo gravitatorio. La ecuación resultante para a puede escribirse como

$$\frac{\dot{a}^2}{H_0^2} - \frac{\Omega}{a} = (1-\Omega), \tag{1}$$

donde Ω esta determinado por el contenido de materia y es $\Omega = \rho_{\rm hoy}/\rho_{\rm c}$ con $\rho_{\rm c}$ una densidad crítica cuyo valor es $\rho_{\rm c} = 3{H_0}^2/(8\pi G)$. El valor actual de a suele elegirse como $a_{\rm hoy} = 1$.

1. *a*) Utilizando el valor observado de la constante de Hubble ($H_0 \sim 70$ Km s^{-1} Mpc^{-1}), determine la densidad crítica del Universo.

   b) Utilizando que el valor de la densidad del Universo es del órden de la densidad crítica, calcule la escala de distancias R a partir de la cual la Teoría de la Gravitación de Newton deja de ser válida (esto ocurre cuando la energía potencial gravitatoria de una dada configuración de materia, $E_g \sim GM^2/R$, es similar a la energía en reposo de esa configuración, $E_0 \sim Mc^2$).

2. En el contexto de la teoría de la relatividad general, y debido a la equivalencia entre masa y energía, la fuente del campo gravitatorio es la densidad de toda la energía (y no solo la energía en reposo o masa). Debido a esto, la cantidad ρ que entra en las ecuaciones de Friedmann es la densidad de energía. Utilizando la primera ley de la termodinámica mostrar que la densidad de energía de la radiación cumple $\rho_r = \rho_r^0\ a^{-4}$. Recordando que para la materia se había derivado en la teoría que $\rho_m = \rho_m^0\ a^{-3}$, muestre que en un universo con Big Bang ($a_{t=0} \sim 0$) la radiación debió dominar la dinámica del universo en los comienzos.

3. A pesar del ejercicio 1, resuelva la evolución del universo utilizando la ecuación 1 para un universo de polvo ($\rho_m = \rho_m^0 a^{-3}$) con densidades mayores ($\Omega > 1$), menores ($\Omega < 1$) e iguales ($\Omega = 1$) a la densidad crítica y muestre que a cumple;

$$a = \frac{\Omega}{2(1-\Omega)}({\rm ch}\eta - 1), \qquad t = \frac{1}{2H_0}\frac{\Omega}{(1-\Omega)^{\frac{3}{2}}}({\rm sh}\eta - \eta), \qquad \Omega < 1$$

$$a = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad \Omega = 1$$

$$a = \frac{\Omega}{2(\Omega-1)}(1-\cos\eta), \qquad t = \frac{1}{2H_0}\frac{\Omega}{(\Omega-1)^{\frac{3}{2}}}(\eta - \sin\eta), \qquad \Omega > 1$$

   Graficar a en función de $H_0 t$ e interpretar físicamente.

4. El descubrimiento de que el Universo está acelerandose ha llevado a postular que el contenido energético del Universo posee una componente denominada 'energía oscura', cuyo efecto sobre la dinámica del universo es agregar una fuerza repulsiva entre los elementos de fluido. A la fecha este efecto es técnicamente equivalente al de modificar la ley de gravitación universal mediante la incorporacion de la famosa *constante cosmológica* de Einstein Λ. En la teoría newtoniana la incorporación de la constante cosmológica modifica la ley de gravitación universal de manera que la aceleración por unidad de volumen de un elemento de fluido es

$$a_g = \frac{-Gm\vec{r}}{r^3} + \frac{\Lambda\vec{r}}{3}$$

   a) Modificar adecuadamente la ecuación de Euler para este caso, y mostrar que bajo estas condiciones es posible un universo estático con una densidad actual $\rho_0 \neq 0$ y presión constante. Calcular el valor de $\Lambda_{(\rho_0)}$ para que esto ocurra.
   b) Demostrar que en este caso la ecuación de movimiento para a es:

$$\left(\dot{a}^2 - \frac{8\pi G\rho_0}{3a} - \frac{\Lambda a^2}{3}\right) = cte.$$

   c) Utilizando el inciso anterior, mostrar que si a es suficientemente grande en un universo con constante cosmológica positiva (repulsiva), Λ domina la dinamica de universo y el factor de escala evoluciona segun $a \sim \exp(\sqrt{\Lambda/3}t)$ (Universo de de Sitter).

5. En un modelo de universo con materia y energía oscura, el factor de escala satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2 H_0^2} = \frac{\Omega_{\rm m}}{a^3} + \Omega_\Lambda. \tag{2}$$

   Demostrar que la solución es:

$$a(T) = \left(\frac{\Omega_{\rm m}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t\right). \tag{3}$$

   Obtener además los comportamientos asintóticos de esta solución para $H_0 t \ll 1$ y $H_0 t \gg 1$.

Referencias

[1] Phillip J. E. Peebles, 1980, Large-Scale Structure of the Universe

[2] Binney, J. y Tremaine, S., Stellar Dynamics.