

Principios de Astrofísica

Jorge Alejandro Panei

Abril 2021 - en construcción

Índice general

1. Termodinámica	1
1.1. Conceptos Básicos en Termodinámica	1
1.2. Primera Ley de la Termodinámica	2
1.3. Entropía y Segunda Ley de la Termodinámica	5
1.4. Segunda Ley de la Termodinámica: Postulados	5
1.5. Teorema de Clausius	6
1.6. Entropía	8
1.7. Postulados de la Termodinámica	11
1.8. Tercera Ley de la Termodinámica	12
1.8.1. Calores Específicos y TLT	12
1.9. Entropía y Mecánica Estadística	13
1.10. Primera Ley de la Termodinámica p/Nro Moles No-cte	13
1.11. Ecuaciones de Estado	15
1.12. Calores Específicos	15
1.12.1. Calor Específico a V=cte	15
1.12.2. Calor Específico a P=cte	16
1.13. Gas Ideal	16
1.13.1. Relaciones entre Calores Específicos de un Gas Ideal	19
1.13.2. Energía Interna de un Gas Ideal	20
1.14. Potencial Termodinámico a T=cte	21
1.15. Potencial Termodinámico a T=cte y P=cte	23
1.16. Entalpía	24
1.17. Procesos Adiabáticos	24
1.18. Exponentes de Chandrasekhar	26
1.19. Entropía de un Gas Ideal	27
1.20. Momento de Entropía en las Estrellas	28
1.21. Procesos Politrópicos	28
1.21.1. Casos Límites para C	29
1.22. Mezcla de Gases	30
1.22.1. Pesos Moleculares	32
1.23. Radiación y Materia	35
1.24. Entropía de un Gas de Fotones	36
1.25. Mezcla Adiabática de Gas Ideal y Radiación	37
1.26. Bibliografía en el Capítulo	41
2. Mecánica Estadística	43
2.1. Célula Cuántica	43
2.1.1. La Partícula Libre	43

2.1.2. Normalización de Born	44
2.1.3. Espacio Fase	45
2.2. Densidad de Partículas	46
2.3. Gases de Fermi y de Bose	46
2.4. Parámetro de Degeneración	47
2.5. Gas de Maxwell	48
2.6. Distribuciones: $P(E)$ vs E	48
2.7. Densidad de Partículas, Presión y Densidad de Energía	50
2.7.1. Densidad Numérica de Partículas	50
2.7.2. Presión	51
2.7.3. Velocidad como función de p	53
2.7.4. Densidad de Energía	54
2.8. Gas de Fermiones	54
2.9. Densidad de Partículas a $T = 0$	56
2.10. Impulso y Energía de Fermi	57
2.11. Presión del Gas a $T = 0$	58
2.11.1. Caso Relativista	58
2.11.2. Caso No-relativista	59
2.11.3. Caso Ultra-relativista	60
2.12. Densidad de Energía Cinética a $T = 0$	61
2.12.1. Caso Relativista	61
2.12.2. Caso No-relativista	61
2.12.3. Caso Ultra-relativista	62
2.13. Ecuación de Estado	62
2.14. Diagrama Densidad-Temperatura	64
2.15. Potencial Químico para los Fotones	67
2.16. Gas de Fotones	68
2.16.1. Densidad de un Gas de Fotones	68
2.16.2. Presión de un Gas de Fotones	69
2.16.3. Densidad de Energía Cinética de un Gas de Fotones	70
2.16.4. Dependencia de n , P y ε con la Frecuencia	70
2.16.5. La Función de Distribución de Planck	72
2.17. Bibliografía en el Capítulo	74
Appendices	77
A. Teoremas y Definiciones Matemáticas	77
B. Abreviaturas	79
C. Nomenclatura y Simbología	81
D. Constantes	83
E. Alfabeto Griego	85
Bibliografía	86

Capítulo 1

Termodinámica

1.1. Conceptos Básicos en Termodinámica

La termodinámica es una teoría fenomenológica de la materia y como tal hay conceptos que provienen de la experiencia.

i) *Sistema termodinámico*: hace referencia a cualquier sistema macroscópico.

ii) *Parámetros termodinámicos*: representan a las cantidades macroscópicas medibles que están asociadas con el sistema, tales como la presión P , el volumen V , la temperatura T , el campo magnético \vec{H} , el campo eléctrico \vec{E} , están definidos experimentalmente.

iii) *Estado termodinámico*: un estado termodinámico está especificado por un conjunto de valores de todos los parámetros termodinámicos necesarios para la descripción del sistema.

iv) *Equilibrio termodinámico*: establece que el estado termodinámico de un sistema no cambia con el tiempo.

v) *Ecuación de estado*: es una funcional de los parámetros termodinámicos para un sistema en equilibrio. Por ejemplo, si P , V y T son parámetros termodinámicos del sistema, la ecuación de estado (EDE) toma la forma:

$$f(P, V, T) = 0 \quad (1.1)$$

de esta manera la EDE reduce el número de variables independientes del sistema, por ejemplo la Ec.(1.1) reduce de tres variables independientes a dos. Geométricamente la EDE (1.1) es una superficie en un espacio de 3-dimensiones P-V-T. Por lo tanto, un estado termodinámico de equilibrio está representado por un punto de la superficie f (ver Fig.(1.1)).

vi) *Transformación termodinámica*: es un cambio de estado del sistema. Supongamos que el estado inicial es un estado de equilibrio, la transformación puede darse sólo mediante cambios en las condiciones externas del sistema. La transformación es cuasi-estática si las condiciones externas cambian tan lentamente que en cualquier momento el sistema está aproximadamente en equilibrio. La transformación es reversible, si cuando las condiciones externas revierten sus cambios, la transformación también lo hace. Una transformación reversible es cuasi-estática. No vale el recíproco. Por ejemplo, la expansión libre de un gas en forma cuasi-estática no es reversible.

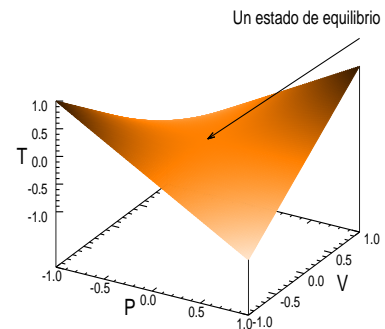


Figura 1.1: Representación geométrica de la EDE en un espacio 3 – D. Se representa $T = T(P, V) = PV$.

vii) *El diagrama $P-V$* : El diagrama $P-V$ de un sistema es la proyección de una curva de nivel, de la superficie que representa la EDE, sobre el plano $P-V$. Por lo tanto, cada punto del diagrama $P-V$ es un estado de equilibrio. Una transformación reversible es una trayectoria continua sobre el plano $P-V$, por ejemplo, isoterma, adiabática, etc. En cambio, una transformación irreversible no tiene representación en ese plano.

viii) *Calor*: es aquello que es absorbido por un sistema homogéneo, si su temperatura aumenta mientras no se realiza trabajo. Si denotamos con ΔQ a una pequeña cantidad de calor absorbida, y con ΔT al pequeño cambio de temperatura que acompaña a esa absorción de calor, la *capacidad térmica*¹ o *capacidad calórica*² C , está dada por:

$$\Delta Q = C \Delta T \quad (1.2)$$

La capacidad calórica es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un sistema en un grado. La capacidad calórica depende de la forma en que el sistema absorbe o cede calor. Las capacidades calóricas comunmente empleadas son C_V y C_P , las cuales corresponden a si la transformación se realiza a volumen V constante o a presión P constante. Las capacidades calóricas por unidad de masa o por unidad de mol³ de una sustancia son llamadas *calores específicos*.

ix) *Sistema térmicamente aislado*: es un sistema que no intercambia calor con el Universo. Un sistema aislado puede lograrse si se lo rodea de paredes adiabáticas. Cualquier transformación que pueda realizar un sistema térmicamente aislado, se dice que es adiabática. El único sistema térmicamente aislado (y adiabáticamente aislado) en el sentido estricto, en todo el Universo, es el estado de presupernova. Este es el estado previo al cual la estrella explota arrojando violentamente material al medio circundante. En ese momento, la estrella se “cae sobre sí misma”, y entonces lo que ocurre es que hasta los neutrinos quedan atrapados en el interior de la misma. Luego el material es expulsado liberando también neutrinos al espacio.

1.2. Primera Ley de la Termodinámica

Vamos a considerar en primera instancia, el caso en que el número de moles es constante. El número de moles está definido como el número real de cada tipo de partícula dividido por el *número o constante de Avogadro*, N_A ⁴. El número de Avogadro es $6,022\,136\,7(36) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Esto es, si se desea saber cuantos moles tenemos en un sistema constituido por un dado tipo de partícula, lo que debemos hacer es dividir el número de partículas del sistema por la constante N_A .

Consideremos un sistema el cual puede alcanzar dos estados termodinámicos, entonces:

El trabajo adiabático que se realiza sobre un sistema para llevarlo del estado 1 al estado 2, es independiente de la forma en que se realiza el trabajo y depende solamente de los estados final e inicial del sistema.

Por lo tanto, el trabajo adiabático es una función de estado. Cuando hablamos de trabajo adiabático, significa el trabajo realizado sobre un sistema que ni pierde ni gana calor de los alrededores, mientras se realiza el trabajo. Este sistema está aislado adiabáticamente. Como el trabajo adiabático sólo depende de los estados inicial y final del sistema, definimos una función U del estado del sistema. Sea U la *energía interna* del sistema, por lo tanto la cantidad

¹Del inglés *thermal capacity* terminología usada por Enrico Fermi (Fermi 1956).

²Del inglés *heat capacity*.

³En un mol de una sustancia entran $6,022\,136\,7(36) \times 10^{23}$ partículas.

⁴Todas las constantes en este texto fueron obtenidas de Cox (2000).

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

es el trabajo adiabático realizado sobre el sistema para llevarlo del estado 1 al estado 2.

Si el sistema no está adiabáticamente aislado, el trabajo realizado sobre el sistema que pasa del estado 1 al estado 2 depende del proceso considerado. Éste es el caso de un sistema que está encerrado en una cavidad con paredes diatérmicas. Por ejemplo, un aumento de la temperatura del sistema puede no venir acompañado de trabajo, sino porque el sistema pudo haber entrado en contacto térmico con otro sistema a mayor temperatura. Pero de todas maneras, la suma del calor neto absorbido más el trabajo realizado sobre el sistema cuando éste pasa del estado 1 al 2, es la misma para todos los procesos e igual al trabajo adiabático necesario para llevar al sistema del estado 1 al 2. Esto último nos conduce al enunciado de la *Primera Ley de la Termodinámica* (PLT), la cual dice:

Primera Ley de la Termodinámica: La suma del calor absorbido por el sistema más el trabajo realizado sobre éste, es igual al aumento de energía interna del sistema para cualquier proceso.

Como consecuencia de esto, es que la energía interna U es una función de estado. Esta ley podemos expresarla con la siguiente ecuación:

$$\Delta U = Q_a + W_s \quad (1.3)$$

donde ΔU es la variación de la energía interna, Q_a es el calor absorbido por el sistema y W_s es el trabajo realizado sobre el sistema. Una característica a tener en cuenta en la Ec.(1.3) es la convención de signos. El trabajo es considerado positivo, si éste aumenta la energía interna del sistema; y es negativo en el caso opuesto.

En sistemas termodinámicos simples, el trabajo cuasi-estático está asociado con un cambio en el volumen y está dado cuantitativamente por:

$$dW_s = -P dV \quad (1.4)$$

donde P es la presión y dW representa una pequeña cantidad de trabajo. Supongamos que realizamos trabajo sobre el sistema, haciendo que el volumen del mismo decrezca (esto es, $dV < 0$), esto produce un incremento en la energía interna, de aquí el hecho que en la Ec.(1.4) aparezca un signo negativo, de manera que en la Ec.(1.3), ΔU crezca.

Cuando el sistema es el que realiza trabajo, al cual denominamos W_p , vale entonces que:

$$W_p = -W_s \quad (1.5)$$

esto puede verse fácilmente en el modelo del pistón. Cuando se considera que el trabajo es realizado por el sistema (W_p), el pistón se expande, o sobre él (W_s), el pistón se comprime.

El trabajo realizado para que el sistema pase del estado 1 al estado 2, depende de la forma en la cual el sistema se traslada de un estado al siguiente. Con esto queremos decir que no existe ninguna función de estado W que venga determinada por el estado del sistema⁵, entonces debemos resolver la integral

$$W = \int_1^2 P dV \quad (1.6)$$

la cual depende del camino. Por lo tanto, *el trabajo W no es una función de estado* del sistema.

Ahora bien, supongamos la siguiente transformación como se ilustra en la Fig.(1.2) mediante la cual vamos del estado 1 al 2 por el camino *a* y volvemos por el camino *b* al punto 1.

⁵Por ello es que empleamos el símbolo d , en lugar de d , para indicar una pequeña cantidad de trabajo.

El trabajo total no es nulo, y está representado por la zona sombreada en gris. Es positivo en el sentido indicado y negativo si circulamos en el contrario. Por la PLT, tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta U = U_2 - U_1 &= Q_a + W_s \\ 0 &= Q_a + W_s . \end{aligned} \quad (1.7)$$

Vamos a introducir otra convención de signo, cuando el calor es absorbido lo consideramos positivo y cuando éste es cedido, negativo. Luego, usando la Ec.(1.7) obtenemos:

$$Q_c = -Q_a = W_s .$$

Por lo tanto, una cantidad de calor Q_c igual al trabajo realizado debe haberse cedido al gas durante el ciclo. Si la circulación se lleva a cabo en el sentido contrario, el sistema realiza trabajo negativo

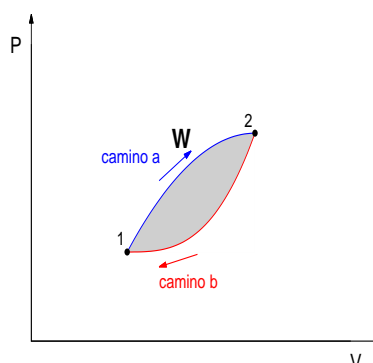


Figura 1.2: Plano P-V. El trabajo total W es la región sombreada en gris.

$$\begin{aligned} \Delta U = 0 &= Q_a + (-W_p) \\ Q_a &= W_p \end{aligned}$$

como el trabajo depende del camino elegido y la variación de energía interna no, el calor que se le suministra al sistema también depende del camino elegido. Por lo tanto, *el calor tampoco es una función de estado*.

Considerando la expresión cuantitativa para el trabajo cuasi-estático Ec.(1.4), vamos a dar una expresión cuantitativa para el flujo de calor. En un proceso cuasi-estático e infinitesimal para número de moles constante, el calor cuasi-estático dQ está definido mediante la Ec.(1.3)

$$dQ_a = dU - dW_s$$

usando la Ec.(1.4) obtenemos,

$$dQ_a = dU + P dV \quad (1.8)$$

la cual es válida para número de moles constante. La Ec.(1.8) es otra manera de expresar la “Primera Ley de la Termodinámica”. Algo a tener en cuenta en la Ec.(1.8) es la convención de signo para dV . De las Ecs.(1.4) y (1.5) resulta que:

$$dW_p = P dV . \quad (1.9)$$

Supongamos que el sistema realiza trabajo en una expansión, entonces $dV > 0$, luego

$$dW_p = P dV > 0.$$

En sistemas termodinámicos simples el trabajo cuasi-estático está asociado con un cambio en el volumen y está dado por la Ec.(1.9). Notemos que hemos usado el concepto de calor o flujo de calor en forma indistinta.

Ahora bien, si el número de moles en un sistema termodinámico no es constante, la expresión dada en la Ec.(1.8) para la PLT no es correcta ya que la energía interna U es una cierta

función⁶ de N_1, N_2, \dots, N_r , donde N_i representa al número de moles del componente químico (o tipo de partícula) i , y r es el número de componentes químicos. Ese caso se verá en la Sec.(1.10).

1.3. Entropía y Segunda Ley de la Termodinámica

Consideremos un proceso cíclico \mathbb{C} como el de la Fig.(1.3) en el cual intervienen cuatro cantidades $Q_\alpha, T_\alpha, Q_\beta$ y T_β , donde Q_α es el calor absorbido por un gas a la temperatura T_α , y Q_β es el calor cedido por el gas a la temperatura T_β , con $T_\alpha > T_\beta$. Es fácil demostrar que en un proceso cíclico se cumple que

$$\frac{Q_\alpha}{T_\alpha} + \frac{Q_\beta}{T_\beta} = 0 \quad (1.10)$$

La demostración de la Ec.(1.10) puede realizarse empleando un ciclo de Carnot⁷. Como el ciclo es reversible, el calor no puede transferirse a través de una diferencia de temperatura, porque esto implicaría un proceso irreversible. Por lo tanto, la máquina de Carnot debe absorber o ceder calor isotérmicamente. Denominamos con W al trabajo total realizado por la máquina. Empleando la Ec.(1.3) de la PLT y la Ec.(1.5) durante un ciclo de Carnot, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta U &= Q - W = 0 \\ W &= Q = Q_\alpha + Q_\beta \end{aligned}$$

puesto que $Q_\alpha > 0$ (calor absorbido) y $Q_\beta < 0$ (calor cedido) entonces:

$$W = Q_\alpha - |Q_\beta| \quad (1.11)$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por una máquina que funcione durante un ciclo de Carnot, es igual al calor absorbido de una fuente caliente menos el calor cedido (en módulo) a una fuente a menor temperatura.

1.4. Postulados para la Segunda Ley de la Termodinámica

Como consecuencia de la PLT y de la Ec.(1.11), empleando un ciclo de Carnot, no hay nada que impida transformar todo el calor en trabajo. Sin embargo, la *Segunda Ley de la Termodinámica* (SLT) no es una consecuencia de la primera ley, sino que constituye por sí misma una ley independiente de la naturaleza, que se refiere a un aspecto diferente de la PLT. La primera ley niega la posibilidad de crear o destruir energía, mientras que la segunda niega la posibilidad de usar la energía de un modo particular. Los dos postulados siguientes son enunciados para la segunda ley, y ambos son equivalentes.

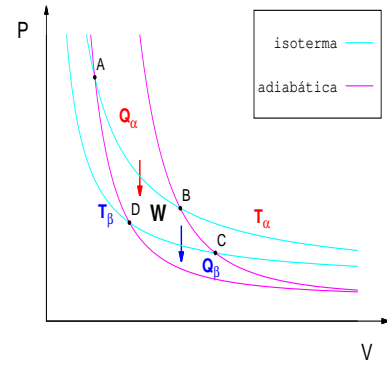


Figura 1.3: Ciclo de Carnot. Las curvas en celeste son isotermas, esto es $PV = C_1$, y en magenta adiabáticas, $PV^\gamma = C_2$ (ver Ec.(1.92)).

⁶También es función de otras cantidades que definiremos más adelante.

⁷Nicolas Léonard Sadi Carnot: físico e ingeniero francés (1796-1832).

Postulado de Kelvin-Planck^{8 9}: “No existe transformación termodinámica cuyo único efecto sea extraer una cantidad de calor de una fuente caliente y convertirlo por completo en trabajo.”

Postulado de Clausius¹⁰: “No existe transformación termodinámica cuyo único efecto sea extraer una cantidad de calor de una fuente a una temperatura dada y transferirla a otra fuente a una temperatura mayor.”

1.5. Teorema de Clausius

Teorema 1.1 Teorema de Clausius

En cualquier transformación cíclica a través de la cual la temperatura está definida, se mantiene la siguiente desigualdad

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (1.12)$$

donde la integral se extiende sobre un ciclo de la transformación. La igualdad es válida si la transformación es reversible.

Demostración

Llamemos a la transformación cíclica en cuestión \mathbb{C} . Dividimos al ciclo en N pasos infinitesimales para los cuales la temperatura es considerada constante en cada uno de los pasos. El sistema \mathbb{S} está sucesivamente en contacto con las fuentes a las temperaturas T_1, T_2, \dots, T_N . Sean Q_1, Q_2, \dots, Q_N la cantidad de calor absorbido o cedido por el sistema a las fuentes. Demostraremos que

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (1.13)$$

El teorema es satisfecho haciendo tender $N \rightarrow \infty$. Consideremos una fuente de calor a una temperatura T_0 y N ciclos de Carnot $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_N$ tal que \mathbb{C}_i (ver Fig.(1.4)):

- i) Opera entre T_i y T_0 , tal que $\forall, T_0 \geq T_i$
- ii) Absorbe una cantidad de calor $Q_{i,0}$ de la fuente T_0 .
- iii) Cede una cantidad de calor Q_i a T_i , es decir una cantidad de calor igual a la que absorbe el sistema a la misma temperatura.

Por Ec.(1.10) tenemos:

$$\frac{Q_{i,0}}{T_0} + \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

con $Q_{i,0} > 0$ y $Q_i < 0$

$$Q_{i,0} = -\frac{T_0}{T_i} Q_i > 0$$

Consideremos ahora un ciclo compuesto, consistente en un ciclo \mathbb{C} del sistema y uno de cada uno de los ciclos de Carnot $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \dots, \mathbb{C}_N$. El intercambio neto de calor en cada una de las fuentes T_i durante el ciclo compuesto es cero, ya que la fuente T_i entrega al sistema \mathbb{S} , una

⁸William Thomson, conocido como Lord Kelvin, fue un físico y matemático británico -escocés- (1824-1907).

⁹Max Karl Ernst Ludwig Planck: físico y matemático alemán (1858-1947).

¹⁰Rudolf Julius Emanuel Clausius: físico y matemático alemán (1822-1888).

cantidad de calor Q_i , pero recibe la misma cantidad de calor del ciclo \mathbb{C}_i . Esto es, el calor absorbido por \mathbb{S} desde T_i es:

$$Q_i = \frac{T_i}{T_0} Q_{i,0} > 0 \tag{1.14}$$

Además, la fuente T_0 pierde una cantidad de calor igual a la suma de las cantidades $Q_{i,0}$, que absorben los ciclos de Carnot $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \dots, \mathbb{C}_N$. Esto es, empleando la Ec.(1.14) obtenemos

$$Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_{i,0} = T_0 \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i}$$

Por lo tanto, el resultado neto del ciclo compuesto por \mathbb{C} y los ciclos $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \dots, \mathbb{C}_N$, es absorber la cantidad de calor Q_0 de la fuente T_0 y convertirlo completamente en trabajo, ya que cada uno de los ciclos vuelve a su estado inicial. Ahora, si Q_0 fuese positivo, este resultado se contradice con el postulado de Kelvin-Planck. Se deduce pues que $Q_0 \leq 0$. Luego

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \tag{1.15}$$

Con la Ec.(1.15) hemos demostrado una parte del Teorema.

Si el ciclo es reversible, podremos emplear los mismos argumentos y realizarlo en dirección opuesta, en cuyo caso todas lo calores Q_i deben cambiarse por $-Q_i$ en la Ec.(1.13):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{-Q_i}{T_i} &\leq 0 \\ \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

pero las Ecs.(1.13) y (1.16) son válidas sólo en el caso de la igualdad. Luego si el ciclo es reversible vale:

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} = 0 \tag{1.17}$$

Q.E.D.
■

Corolario 1.1.1 *Corolario del Teorema de Clausius*
Para una transformación reversible, la integral

$$\int \frac{dQ}{T} \tag{1.18}$$

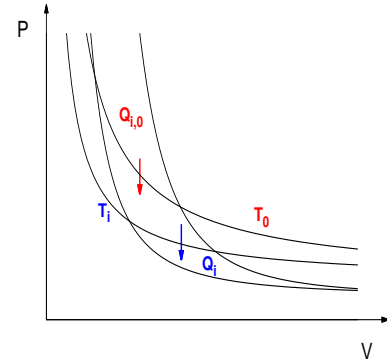


Figura 1.4: Ciclo de Carnot entre T_0 y T_i .

es independiente del camino y depende solamente de los estados inicial y final de la transformación.

Demostración

Supongamos un sistema que realiza una transformación reversible que va del punto inicial A al B por el camino I y vuelve por el camino II al punto A (ver Fig.(1.5)). Por el Teorema 1.1, Ec.(1.17) tenemos

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

$$\left[\int_A^B \frac{dQ}{T} \right]_I + \left[\int_B^A \frac{dQ}{T} \right]_{II} = 0$$

$$\left[\int_A^B \frac{dQ}{T} \right]_I = \left[\int_A^B \frac{dQ}{T} \right]_{II}$$

Por lo tanto, la siguiente integral

$$\int_A^B \frac{dQ}{T}$$

no depende del camino.

Q.E.D.



1.6. Entropía

A partir del Corolario (1.1.1) Ec.(1.18), existe una función del estado de un sistema que denominaremos *entropía*, y que denotamos con S . Elegimos un punto arbitrario O tal que $S(O) = 0$.

Sea A cualquier otro estado de equilibrio:

$$S(A) = \int_O^A \frac{dQ}{T} \tag{1.19}$$

y es una función del estado de A únicamente.

Consideremos dos estados de equilibrio A y B , y sean $S(A)$ y $S(B)$ las entropías de dichos estados, respectivamente. Con la siguiente propiedad veremos como se relacionan ambos estados entre sí.

Propiedad 1.1 *La diferencia en la entropía de dos estados está dada por:*

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{dQ}{T} \tag{1.20}$$

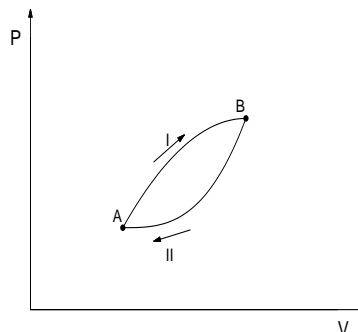


Figura 1.5: Transformación reversible.

Demostración

Elegimos un punto de equilibrio O . Como por el Corolario 1.1.1 la integral dada por la Ec.(1.20) tiene el mismo valor para cualquier transformación reversible que va de A a B . Podemos elegir una transformación la cual va de A a O mediante una transformación reversible, y de O a B por otra transformación reversible. Luego:

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^O \frac{dQ}{T} + \int_O^B \frac{dQ}{T} = - \int_O^A \frac{dQ}{T} + \int_O^B \frac{dQ}{T},$$

luego, por Ec.(1.19) obtenemos:

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = S(B) - S(A)$$

Q.E.D.



Vemos entonces que la entropía queda definida a menos de una constante aditiva. Más adelante veremos que la *Tercera Ley de la Termodinámica* nos completa la definición de la entropía y nos permite determinar dicha constante.

Definición 1.1 *Se sigue de la Ec.(1.20) que en cualquier transformación infinitesimal reversible el cambio en la entropía viene dado por*

$$dS = \frac{dQ}{T}. \tag{1.21}$$

Propiedad 1.2 *Para una transformación arbitraria vale que*

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{dQ}{T}. \tag{1.22}$$

La igualdad es válida si la transformación es reversible.

Demostración

Sea R un camino para una transformación reversible y sea I un camino para una transformación irreversible. Consideremos un ciclo que va de A a B por el camino I y vuelve a A por el camino R (ver Fig.(1.6)). Por el Teorema 1.1 Ec.(1.12)

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

$$\left[\int_A^B \frac{dQ}{T} \right]_I + \left[\int_B^A \frac{dQ}{T} \right]_R \leq 0$$

$$\left[\int_A^B \frac{dQ}{T} \right]_I - \left[\int_A^B \frac{dQ}{T} \right]_R \leq 0$$

en la segunda integral podemos usar la Ec.(1.20) ya que por ese camino la transformación es reversible:

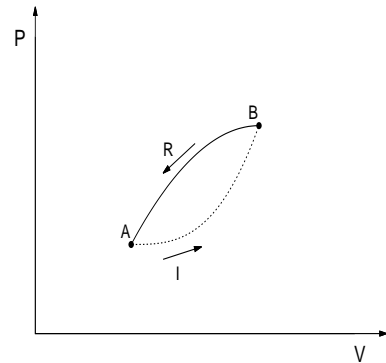


Figura 1.6: Caminos reversible R e irreversible I que conectan los estados A y B . El camino I no podemos representarlo ya que no existe función para graficarlo.

$$\left[\int_A^B \frac{dQ}{T} \right]_I - [S(B) - S(A)] \leq 0$$

Luego

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

Q.E.D.

■

Propiedad 1.3 *Para un sistema totalmente aislado, la entropía nunca decrece.*

Demostración

Puesto que por estar el sistema aislado, éste no intercambia calor con los alrededores, entonces $dQ = 0$. Luego por Propiedad 1.2 Ec.(1.22)

$$S(B) \geq S(A) \tag{1.23}$$

Q.E.D.

■

Como consecuencia de la Propiedad 1.3 podemos decir que para un sistema aislado ocurre lo siguiente:

Enunciado 1.1 *Para cualquier transformación que se efectúa en un sistema aislado, la entropía del estado final no puede ser nunca menor que la del estado inicial.*

Enunciado 1.2 *Para cualquier transformación reversible que se efectúa en un sistema aislado, la entropía se mantiene constante.*

Propiedad 1.4 *Si un sistema aislado está en un estado de máxima entropía entonces el sistema está en equilibrio.*

Demostración

Sea un sistema aislado que se halla en un estado de máxima entropía compatible con su energía. Éste no puede sufrir ningún otro cambio, ya que cualquier transformación implicaría una disminución de la entropía. Por lo tanto, el estado de máxima entropía es un estado de equilibrio para el sistema.

Q.E.D.

■

Luego podemos enunciar lo siguiente:

Enunciado 1.3 *El estado más estable para un sistema aislado es el estado de máxima entropía.*

1.7. Postulados de la Termodinámica

Para comprender el concepto de ecuación de estado, enunciemos el primer postulado de la termodinámica, el cual está estrechamente vinculado a ella.

Postulado 1.1 *Postulado I de la Termodinámica*

Los estados de equilibrio de los sistemas simples quedan completamente determinados mediante la energía U , el volumen V y el número de moles N_1, N_2, \dots, N_r de los componentes químicos.

donde r es el número de subsistemas.

Postulado 1.2 *Postulado II de la Termodinámica*

La entropía de un sistema compuesto es aditiva sobre los subsistemas constituyentes.

Postulado 1.3 *Postulado III de la Termodinámica*

La entropía es continua y diferenciable, y es una función monótonamente creciente con la energía.

A partir del Postulado II (1.2) podemos escribir lo siguiente. Sean N subsistemas con entropías $S_i, i = 1, \dots, N$ entonces la entropía del sistema constituido por los N subsistemas es:

$$S = \sum_{i=1}^N S_i \quad (1.24)$$

en donde cada entropía S_i es una función de la energía interna U_i , el volumen V_i , y el número de moles $N_1^i, N_2^i, \dots, N_r^i$ de los componentes químicos.

En particular

$$S = S(U, V, N_1, N_2, \dots, N_r) . \quad (1.25)$$

Por el Postulado III (1.3)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V, N_1, N_2, \dots, N_r} > 0 . \quad (1.26)$$

Veremos en la Sec.(1.10) Ec.(1.35) que la recíproca de la Ec.(1.26) es la definición de la temperatura, de esta manera la temperatura no puede ser nunca negativa.

La función S dada por Ec.(1.25) nos dice que implícitamente podemos determinar a U como función de $S, V, N_1, N_2, \dots, N_r$, esto es:

$$U = U(S, V, N_1, N_2, \dots, N_r) \quad (1.27)$$

Postulado 1.4 *Postulado IV de la Termodinámica*

La entropía de cualquier sistema se anula en el estado para el cual

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1, N_2, \dots, N_r} = 0 . \quad (1.28)$$

1.8. Tercera Ley de la Termodinámica

Como consecuencia del Postulado 1.4 veremos en Sec.(1.10) Ec.(1.35) que esto es equivalente a anular la temperatura T . Este postulado está relacionado con el *Teorema de Nernst*¹¹ o *Tercera Ley de la Termodinámica* (TLT) el cual enuncia que:

Teorema 1.2 *Teorema de Nernst*

Es imposible para cualquier proceso reducir la entropía de un sistema a su valor de cero absoluto en un número finito de operaciones.

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = 0 \quad (1.29)$$

□

Una alternativa para enunciar la TLT es:

Tercera Ley de la Termodinámica: En el cero absoluto, la entropía de un sistema puede siempre considerarse igual a cero.

Esto significa que *todos los estados posibles de un sistema a la temperatura $T = 0$, tienen la misma entropía.*

Como consecuencia, el cero absoluto es teóricamente la temperatura más baja, para la cual el movimiento térmico de los átomos y las moléculas alcanza su mínimo. Este es un estado en el que la entalpía y la entropía de un gas ideal enfriado alcanza su mínimo, el cual es cero. Esto último podemos verlo a partir de la Ec.(1.83), es decir:

$$\Delta H = T \cdot \Delta S \quad (1.30)$$

1.8.1. Calores Específicos y Tercera Ley de la Termodinámica

Veamos como son los calores específicos a presión y a volumen constante, C_P y C_V respectivamente, para $T=0$. A partir de las Ecs.(1.2) y (1.19) podemos escribir

$$S(A) = \int_0^A \frac{C(T)}{T} dT \quad (1.31)$$

Si la capacidad térmica $C(T = 0)$ fuese distinta de cero, la integral Ec.(1.31) sería diferente de cero en el límite inferior, pero hemos tomado $S(0) = 0$. Por lo tanto debe ser:

$$C(T = 0) = 0$$

En particular, valen $C_V(T = 0) = 0$ y $C_P(T = 0) = 0$. A consecuencia de esto podemos afirmar: *en el cero absoluto, todos los cristales tienen la misma entropía y no poseen la capacidad alguna para almacenar calor.* En el caso de las *enanas blancas*, a medida que éstas se enfrían (sobre su curva evolutiva final en el diagrama de Hertzsprung-Russell - HR) el núcleo se va cristalizando desde el centro hacia afuera, a medida que van liberando el calor almacenado en los iones durante su vida previa. El destino final de una enana blanca es una *enana negra*, un objeto compacto que no tiene ninguna capacidad de almacenar calor.

¹¹Walther Nernst: físico y químico alemán (1864-1941).

1.9. Entropía y Mecánica Estadística

En mecánica estadística la *ecuación de Boltzmann*¹² es una ecuación que relaciona la entropía S de un gas ideal con el número de microestados posibles consistentes con las restricciones macroscópicas. Su expresión es:

$$S = k \cdot \ln \pi \quad (1.32)$$

donde k es la *constante de Boltzmann* ($k = 1,380\,658(12) \times 10^{-16}$ erg K⁻¹) y π es el número de estados dinámicos que corresponden a un estado termodinámico dado. De acuerdo con esta ecuación el valor de π correspondiente a $S = 0$, es $\pi = 1$. Desde el punto de vista estadístico, el Teorema de Nernst afirma que *al estado termodinámico de un sistema en el cero absoluto, le corresponde únicamente un estado dinámico, el estado de mínima energía compatible con la estructura cristalina del sistema.*

1.10. Primera Ley de la Termodinámica para Número de Moles No-constante

Hemos visto que la Primera Ley de la Termodinámica para el caso de número de moles igual a constante está dada por la Ec.(1.8):

$$dU = \delta Q - P dV$$

usando la Ec.(1.21) obtenemos

$$dU = T dS - P dV \quad (1.33)$$

Por Ec.(1.27) hemos visto que la energía interna U es función de $S, V, N_1, N_2, \dots, N_r$

$$U = U(S, V, N_1, N_2, \dots, N_r)$$

Vamos a utilizar dos teoremas importantes para las funciones de estado.

Teorema 1.3 Teorema: Función de Estado y Diferenciabilidad
f es una función de estado si y sólo si df es un diferencial exacto.

□

Teorema 1.4 Teorema: Continuidad y Diferenciabilidad
Si f(x) es diferenciable en un punto "a" de su dominio, entonces es continua en "a".

□

Entonces, de acuerdo a los Teoremas (1.3) y (1.4) podemos afirmar que:

f es función de estado $\Rightarrow f$ es diferenciable $\Rightarrow f$ es continua.

Luego, como U es una función de estado, entonces dU es un diferencial exacto:

¹²Ludwig Eduard Boltzmann: físico austríaco (1844-1906).

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1, N_2, \dots, N_r} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_1, N_2, \dots, N_r} dV + \sum_i^r \left(\frac{\partial U}{\partial N_i} \right)_{S, V, N_1, N_2, \dots, N_r} dN_i \quad (1.34)$$

De acuerdo a Ec.(1.33) definimos:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1, N_2, \dots, N_r} = T \quad (1.35)$$

donde T es la temperatura, y

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_1, N_2, \dots, N_r} = -P \quad (1.36)$$

donde P es la presión. Definimos μ_i como el *potencial químico* de la componente i . μ_i tiene unidades de energía, ya que N_i tiene unidades de mol.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N_i} \right)_{S, V, N_1, N_2, \dots, N_r} = \mu_i \quad (1.37)$$

Luego a partir de la Ec.(1.34) podemos escribir la *Primera Ley de la Termodinámica para el caso de número de moles no-constante* como sigue:

$$dU = T dS - P dV + \sum_i^r \mu_i dN_i \quad (1.38)$$

Las cantidades:

$$dQ = T dS$$

es el flujo de calor cuasi-estático¹³. El aumento de este flujo dentro del sistema produce un incremento de la entropía en el mismo.

$$dW_m = -P dV$$

es el trabajo mecánico cuasi-estático.

$$dW_q = \sum_i^r \mu_i dN_i$$

es el trabajo químico cuasi-estático. Si se agrega materia al sistema, aumenta dN_i , esto produce un incremento de la energía interna al mismo. Luego podemos escribir:

$$dU = dQ + dW_m + dW_q$$

¹³De ahora en adelante vamos a obviar la notación d en dQ y dW , pero debemos recordar que no existe ninguna función de estado Q ni W que represente al calor o al trabajo, sólo indica una pequeña cantidad para cada uno de ellos.

1.11. Ecuaciones de Estado

Hemos visto por Ecs.(1.35), (1.36) y (1.37) que la temperatura T , la presión P y los potenciales químicos μ_i son derivadas parciales de la función $U = U(S, V, N_1, N_2, \dots, N_r)$. Esto nos dice que implícitamente T , P y μ_i son también funciones de $S, V, N_1, N_2, \dots, N_r$, luego:

$$\begin{aligned} T &= T(S, V, N_1, N_2, \dots, N_r) \\ P &= P(S, V, N_1, N_2, \dots, N_r) \\ \mu_i &= \mu_i(S, V, N_1, N_2, \dots, N_r) \end{aligned}$$

Todas estas relaciones son ecuaciones de estado al igual que $U = U(S, V, N_1, N_2, \dots, N_r)$. Supongamos el caso en donde el número de moles para cada especie i es constante. Consideremos las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} T &= T(S, V) \\ P &= P(S, V) \\ U &= U(S, V) \end{aligned} \quad (1.39)$$

A partir de estas ecuaciones de estado vamos a obtener los calores específicos a volumen y a presión constantes, C_V y C_P respectivamente.

1.12. Calores Específicos

1.12.1. Calor Específico a Volumen Constante

Combinando de las Ecs(1.39) las expresiones para U y T para eliminar S , obtenemos implícitamente:

$$U = U(T, V)$$

donde T y V son las variables independientes. Con esta relación y con la PLT para el número de moles constante.

$$dQ = dU + P dV$$

Por ser U una función de estado podemos escribir su diferencial exacto:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

reemplazando esta última ecuación en la PLT:

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV \quad (1.40)$$

Por la Ec.(1.2) y si consideramos una transformación infinitesimal a volumen constante, es decir $dV = 0$, tenemos que:

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (1.41)$$

donde C_V es el *calor específico a volumen constante*.

1.12.2. Calor Específico a Presión Constante

Vamos a escribir una expresión análoga a la Ec.(1.40) pero en donde elegimos a T y P como variables independientes. Si de las Ecs.(1.39) combinamos $U = U(S, V)$ y $P = P(S, V)$ eliminando S , implícitamente determina:

$$U = U(P, V) \quad (1.42)$$

usando $U = U(S, V)$ y $T = T(S, V)$ eliminando S , implícitamente determina:

$$U = U(T, V) \quad (1.43)$$

usando $T = T(S, V)$ y $P = P(S, V)$ eliminando S , implícitamente determina:

$$V = V(T, P) \quad (1.44)$$

combinando Ecs.(1.42) y (1.43), eliminando V :

$$U = U(T, P) \quad (1.45)$$

Por Ec.(1.44) podemos escribir:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP. \quad (1.46)$$

Análogamente, podemos escribir de Ec.(1.45)

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T dP. \quad (1.47)$$

Remplazando Ecs.(1.46) y (1.47) en la PLT,

$$dQ = dU + P dV,$$

obtenemos la siguiente expresión:

$$dQ = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right] dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T + P \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \right] dP \quad (1.48)$$

Por la Ec.(1.2) y si consideramos una transformación infinitesimal a presión constante, es decir $dP = 0$, obtenemos:

$$C_P = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (1.49)$$

donde C_P es el *calor específico a presión constante*. El segundo término del miembro derecho de la Ec.(1.49), es el efecto en C_P del trabajo realizado durante la expansión.

1.13. Gas Ideal

Definición 1.2 *Gas Ideal*

Un gas ideal es un sistema termodinámico, en el cual las partículas no interactúan entre sí.

Para partículas clásicas, cuyo concepto veremos más adelante -Sec.(2.5):

Definición 1.3 *Gas Ideal Clásico*

Un gas ideal clásico es un sistema termodinámico, el cual se halla lo suficientemente diluido de manera tal que las partículas no interactúan entre sí.

La ecuación de estado de un gas ideal o gas perfecto está dada por la relación:

$$PV = NkT \quad (1.50)$$

donde P es la presión, V el volumen, N el número de partículas (éstas pueden ser átomos, moléculas, núcleos, electrones, etc), k constante de Boltzmann y T la temperatura.

La relación entre k la constante de Boltzmann, N_A el número de Avogadro y R la *constante Universal de los Gases* ($R = 8,314510(70) \times 10^7 \text{ erg K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$, $R = 1,987216 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$) es:

$$k = \frac{R}{N_A} . \quad (1.51)$$

El número de moles de una sustancia podemos calcularlo dividiendo el número de partículas por el número de Avogadro. Si n_m es el número de moles entonces

$$n_m = \frac{N}{N_A} \quad (1.52)$$

las unidades de las cantidades involucradas son $[N]=s/u$ y $[N_A] = \text{mol}^{-1}$. En un mol de una sustancia hay aproximadamente 6×10^{23} partículas. Luego es fácil ver que:

$$Nk = n_m R \quad (1.53)$$

luego la ecuación de los gases ideales Ec.(1.50) la podemos escribir como:

$$PV = n_m RT \quad (1.54)$$

Teorema 1.5 *La energía interna de un gas ideal a número de moles igual a constante, es sólo función de la temperatura y no del volumen del gas.*

Demostración

Para demostrar esta propiedad vamos a usar: (i) PLT, (ii) la energía interna U es función de estado y (iii) el Teorema de Schwarz.

Por Ec.(1.43) sabemos que $U = U(T, V)$ para el caso de número de moles constante. Por la PLT y por ser U función de estado vimos por Ec.(1.40) que:

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV$$

Por Ec.(1.21) es $dS = \frac{dQ}{T}$, luego:

$$dS = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV \quad (1.55)$$

donde dS es una diferencial exacta, esto es:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \quad (1.56)$$

Notar que de acuerdo a la Ec.(1.55) debe ser $T \neq 0$.

Ahora para un diferencial exacto de la función $z(x, y)$:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x dy$$

o también,

$$dz = f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

con f y g funciones continuas. Luego:

$$f(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \quad \text{y} \quad g(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x$$

derivando la primera respecto a y y a la segunda respecto a x ,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

De acuerdo al Teorema de Schwarz A.1 y por ser z una función continua las derivas segundas cruzadas de z son iguales. Esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Luego aplicando esto último y por Ecs.(1.55) y (1.56) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T} \right] = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} + P \right) \right]$$

derivando

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial V} + P \right) + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \frac{\partial P}{\partial T} \right)$$

por ser U función de estado $\Rightarrow U$ es diferenciable $\Rightarrow U$ es continua, luego por Teorema de Schwarz A.1 las derivadas segundas cruzadas de U son iguales, luego:

$$0 = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial V} + P \right) + \frac{1}{T} \frac{\partial P}{\partial T}$$

Por ser $T \neq 0$:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

De la Ec.(1.54) de un gas ideal a $n_m = \text{cte}$, $P = n_m RT/V$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{n_m RT}{V} \right) - \frac{n_m RT}{V} = 0.$$

Entonces U no depende de V . Luego para un gas ideal a $n_m = \text{cte}$, vale que la energía interna sólo depende de la temperatura T , es decir $U = U(T)$.

Q.E.D.

■

Corolario 1.5.1 *El calor específico a volumen constante de un gas ideal puede calcularse como:*

$$C_V = \frac{dU}{dT} \quad (1.57)$$

Demostración

Por el Teorema 1.5 vale que $U = U(T)$ y por Ec.(1.41) se tiene que:

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V,$$

luego

$$C_V = \frac{dU}{dT}$$

Q.E.D.

■

Podemos entonces calcular la energía interna de un gas ideal si conocemos el calor específico a volumen constante, luego

$$\int_{U_0}^U dU = \int_{T_0}^T C_V dT$$

si $C_V = \text{cte}$ entonces

$$U = C_V (T - T_0) + U_0$$

donde U_0 es la energía interna del gas a $T = T_0$. No podríamos extender T_0 hasta el valor cero pues dejaría de ser válida la ecuación de estado del gas ideal. Lo que veremos más adelante en la Sec.(??).

1.13.1. Relaciones entre Calores Específicos de un Gas Ideal

Veremos en esta sección como se relacionan los calores específicos a volumen constante C_V y a presión constante C_P para el gas ideal. Por la PLT

$$dQ = dU + P dV$$

para un gas ideal de acuerdo a Ec.(1.57)

$$dQ = C_V dT + P dV \quad (1.58)$$

si diferenciamos la ecuación del gas ideal Ec.(1.54) para el caso de número de moles constante ($n_m = \text{cte}$)

$$P dV + V dP = n_m R dT \quad (1.59)$$

eliminando $P dV$ de las Ecs.(1.58) y (1.59)

$$dQ = C_V dT - V dP + n_m R dT$$

si la transformación se realiza a presión constante, es decir $dP = 0$, de la última ecuación

$$dQ = C_V dT + n_m R dT$$

por su definición el calor específico a presión constante es por Ec.(1.49)

$$C_P = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P$$

luego

$$C_P = C_V + n_m R \quad (1.60)$$

usando la Ec.(1.53):

$$C_P = C_V + Nk \quad (1.61)$$

1.13.2. Energía Interna de un Gas Ideal

La energía interna de un gas ideal es

$$U = C_0 NkT \quad (1.62)$$

donde C_0 es una constante, N es el número de partículas, k la constante de Boltzmann y T la temperatura. Los gases ideales monoatómicos no interactuantes cuya energía kT es pequeña comparada con la energía de excitación electrónica (esto es para $T \lesssim 10^4$ K) y cuya presión es baja o moderada, cumplen con la Ec.(1.62) y en ese caso la constante C_0 vale

$$C_0 = \frac{3}{2}.$$

Para gases constituidos de moléculas diatómicas a temperaturas moderadas

$$C_0 = \frac{5}{2},$$

y a temperaturas mayores

$$C_0 = \frac{7}{2}.$$

El límite entre ambas regiones ocurren para temperaturas $T \simeq 10^3$ K.

Según lo enunciado para un gas cuya ecuación de estado es la Ec.(1.50)

$$PV = NkT,$$

o también

$$P = nkT, \quad (1.63)$$

donde n es la densidad numérica de partículas dada por

$$n = \frac{N}{V} \quad [n] = \text{cm}^{-3} \quad (1.64)$$

con unidades de número de partículas por unidad de volumen. Hablar de presiones moderadas es lo mismo que decir densidades moderadas. Este es el caso de un gas no-degenerado¹⁴. Luego para un gas no-degenerado no-relativista vale

¹⁴Veremos en Sec.(2.4) el concepto de degeneración.

$$U = \frac{3}{2} N k T . \quad (1.65)$$

En el caso de un gas no-degenerado relativista la energía interna es:

$$U = 3 N k T . \quad (1.66)$$

Las expresiones para la energía interna dadas por Ecs.(1.65) y (1.66) serán deducidas más adelante a partir de la estadística de *Maxwell-Boltzmann*, en la Sec.(??).

Conociendo la energía interna podemos calcular los calores específicos para un gas ideal monoatómico, usando Ecs.(1.57) y Ecs.(1.65)

$$C_V = \frac{3}{2} N k , \quad (1.67)$$

y reemplazando en Ecs.(1.61)

$$C_P = \frac{5}{2} N k . \quad (1.68)$$

Estas dos últimas expresiones son para el caso no-relativista. Análogamente, para el caso relativista

$$C_V = 3 N k \quad \text{y} \quad C_P = 4 N k . \quad (1.69)$$

En forma similar para un gas diatómico a bajas temperaturas ($T < 10^3$ K),

$$C_V = \frac{5}{2} N k \quad \text{y} \quad C_P = \frac{7}{2} N k , \quad (1.70)$$

y a temperaturas mayores ($T > 10^3$ K),

$$C_V = \frac{7}{2} N k \quad \text{y} \quad C_P = \frac{9}{2} N k . \quad (1.71)$$

1.14. Potencial Termodinámico a Temperatura Constante

Consideremos un sistema termodinámico que está en contacto térmico con un medio a la temperatura T ($T = \text{cte}$). El mismo sufre una transformación termodinámica desde el estado inicial A al estado final B . Para una transformación arbitraria vale por Ec.(1.22):

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

Puesto que el sistema recibe calor de la fuente que está a la temperatura $T = \text{cte}$, entonces:

$$Q = \int_A^B dQ \leq T [S(B) - S(A)]$$

Esto es, existe un límite superior para la cantidad de calor absorbido por el sistema desde el medio que lo rodea. Por la primera ley de la termodinámica:

$$W = -\Delta U + Q$$

donde W es el trabajo realizado por el sistema, Q es la cantidad de calor absorbido ($Q > 0$) o cedido por el sistema ($Q < 0$) y ΔU es la variación de energía interna. Luego:

$$\begin{aligned}
 W &= -[U(B) - U(A)] + Q \\
 W &\leq -U(B) + U(A) + T \cdot S(B) - T \cdot S(A) \\
 W &\leq [U(A) - T \cdot S(A)] - [U(B) - T \cdot S(B)]
 \end{aligned} \tag{1.72}$$

por lo tanto, existe un límite superior para el trabajo realizado por el sistema durante la transformación para ir de A a B . Si la transformación es reversible vale la igualdad.

Si definimos una nueva función de estado del sistema, y la llamamos F , tal que:

$$F = U - T \cdot S, \tag{1.73}$$

a la cantidad F se la denomina *energía libre de Helmholtz*, luego reemplazando la definición Ec.(1.73) en la Ec.(1.72), tenemos:

$$\begin{aligned}
 W &\leq F(A) - F(B) \\
 W &\leq -\Delta F
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

podemos entonces enunciar que:

Enunciado 1.4 *Durante una transformación reversible para un sistema termodinámico que va del estado A al B e intercambia calor con el medio circundante a la temperatura T , el trabajo realizado por el sistema durante la transformación es igual a la disminución de la energía libre de Helmholtz. Si el proceso es irreversible ese decremento de F es sólo un límite superior.*

El mismo enunciado podemos expresarlo como:

Enunciado 1.5 *Durante una transformación isoterma, el trabajo W realizado por un sistema, nunca puede superar a la variación de la energía libre de Helmholtz ΔF cambiada de signo.*

Teorema 1.6 *En equilibrio termodinámico F , la energía libre de Helmholtz, es mínima.*

Demostración

Sea un sistema aislado dinámicamente, pero no térmicamente, del medio circundante. Por lo tanto, no existe intercambio de energía en forma de trabajo entre el sistema y el medio. Esto es, el sistema sólo realiza transformaciones a $W = 0$. Decir que es a $W = 0$, no necesariamente implica que el volumen sea constante, es decir transformación isocórica, a pesar de la relación $W = P \cdot \Delta V$. Además, el sistema está en contacto térmico con el medio a la temperatura T .

Luego por Ec.(1.74):

$$\begin{aligned}
 W = 0 &\leq -\Delta F = -[F(B) - F(A)] \\
 F(B) &\leq F(A)
 \end{aligned} \tag{1.75}$$

Por lo tanto, si el sistema está en contacto térmico con el medio a la temperatura T y dinámicamente aislado; es decir, no efectúa, ni recibe trabajo externo, su energía libre de Helmholtz no puede aumentar durante la transformación.

Por consiguiente, si la energía libre de Helmholtz es mínima, el sistema se halla en equilibrio estable. Es decir, si el sistema realizara cualquier transformación arbitraria esto produciría un incremento en la energía libre de Helmholtz, lo que contradice la Ec.(1.75).

Q.E.D.



1.15. Potencial Termodinámico a Temperatura y Presión Constantes

Consideremos un sistema termodinámico que sufre una transformación isobárica ($P = \text{cte}$) e isotérmica ($T = \text{cte}$), que lleva al sistema desde el estado inicial A al estado final B , con $V(A)$ y $V(B)$, los volúmenes inicial y final, respectivamente. El trabajo durante la transformación es:

$$W = P \cdot [V(B) - V(A)]$$

dado que la transformación es isotérmica podemos usar la Ec.(1.74)

$$\begin{aligned} W &\leq -\Delta F = -[F(B) - F(A)] \\ P \cdot V(B) - P \cdot V(A) &\leq F(A) - F(B) \\ 0 &\leq [F(A) + P \cdot V(A)] - [F(B) + P \cdot V(B)] \end{aligned} \quad (1.76)$$

Si definimos una nueva función de estado del sistema, y la llamamos G , tal que:

$$G = F + P \cdot V \quad (1.77)$$

$$G = U - T \cdot S + P \cdot V \quad (1.78)$$

a la cantidad G se la denomina *energía libre de Gibbs*, luego reemplazando su definición, la Ec.(1.77), en la Ec.(1.76), tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq G(A) - G(B) = -\Delta G \\ G(B) &\leq G(A) \end{aligned} \quad (1.79)$$

podemos entonces enunciar que:

Enunciado 1.6 *Durante una transformación isobárica e isotérmica para un sistema termodinámico que va del estado A al B , la energía libre de Gibbs no puede aumentar.*

Teorema 1.7 *En equilibrio termodinámico G , la energía libre de Gibbs, es mínima.*

Demostración

Sea un sistema termodinámico que está en equilibrio, y que además sufre una transformación isobárica e isotérmica, luego por Ec.(1.79) es $G(B) \leq G(A)$, entonces el sistema debe encontrarse en un mínimo, ya que cualquier transformación incrementaría G , en contradicción con esa desigualdad.

Q.E.D.



1.16. Entalpía

La entalpía es el flujo de energía térmica durante un proceso termodinámico que se realiza a presión constante cuando el único trabajo es mecánico (P-V). Es la cantidad de energía que un sistema intercambia con su entorno.

La entalpía es una función de estado donde su variación permite expresar la cantidad de calor involucrada durante una transformación isobárica. Se define como:

$$H = U + P \cdot V \quad (1.80)$$

Por Ec.(1.78) podemos escribir la entalpía como:

$$H = G + T \cdot S \quad (1.81)$$

A partir de la Ec.(1.80) escribimos

$$dH = dU + V \cdot dP + P \cdot dV$$

y por PLT para el caso de números de moles que no es constante, Sec.(1.10) Ec.(1.38)

$$dU = T \cdot dS - P \cdot dV + \sum_{i=1}^r \mu_i \cdot dN_i .$$

Luego, a partir de estas dos últimas expresiones se tiene que:

$$dH = T \cdot dS + V \cdot dP + \sum_{i=1}^r \mu_i \cdot dN_i \quad (1.82)$$

Si la transformación se realiza a presión $P=\text{cte}$ y si los números de moles N_i son constantes, resulta que

$$dH = T \cdot dS \quad (1.83)$$

1.17. Procesos Adiabáticos

Un proceso adiabático es aquel para el cual el sistema no intercambia calor con sus alrededores. Es decir, no hay ganancia ni pérdida de calor mediante conducción o radiación de la energía. Luego, por Ec.(1.21):

$$dQ = T dS \quad (1.84)$$

pero, en este caso es $dQ = 0 \Rightarrow TdS = 0$, pero como $T \neq 0$ entonces es $dS = 0$, es decir a entropía S igual a constante.

Una medida del proceso adiabático está dada por el índice adiabático, el cual denominamos γ , y definiremos a continuación.

Consideremos un proceso adiabático y la PLT, para un gas ideal. Entonces:

$$\begin{aligned} dQ = 0 \quad dQ = dU + PdV \quad dU = C_V dT \\ - PdV = C_V dT \end{aligned} \quad (1.85)$$

Si diferenciamos la EDE de un gas ideal para $N = cte$:

$$P dV + V dP = Nk dT \quad (1.86)$$

sumando Ecs.(1.85) y (1.86)

$$V dP = (C_V + Nk) dT$$

usamos la Ec.(1.85) para eliminar el dT

$$-\frac{V dP}{P dV} = \frac{C_V + Nk}{C_V}$$

luego por Ec.(1.61)

$$-\frac{V dP}{P dV} = \frac{C_P}{C_V} \quad (1.87)$$

definimos γ como

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (1.88)$$

denominado *índice* o *exponente adiabático*. Para el caso de un gas ideal monoatómico no-relativista, por Ecs.(1.67) y (1.68), es

$$\gamma = \frac{5}{3}, \quad (1.89)$$

y para el caso relativista, por Ec.(1.69), es:

$$\gamma = \frac{4}{3}. \quad (1.90)$$

Para el caso de un gas diatómico a $T < 10^3$ K vale $\gamma = \frac{7}{5}$, y para $T > 10^3$ K es $\gamma = \frac{9}{7}$. Luego, reemplazando la definición de γ en Ec.(1.87) obtenemos

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V},$$

integrando

$$\ln P = \ln V^{-\gamma} + \ln C_1, \quad (1.91)$$

o también

$$P V^\gamma = C_1. \quad (1.92)$$

que es la *ecuación de una adiabática* en el plano $P - V$. Notar que podemos definir a γ como sigue. Diferenciando la Ec.(1.91) obtenemos:

$$\gamma = -\left(\frac{d \ln P}{d \ln V}\right)_S. \quad (1.93)$$

Usando la EDE del gas ideal $PV = NkT$ para eliminar V de Ec.(1.92), se obtiene:

$$T P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = C_2, \quad (1.94)$$

o también

$$P T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = C'_2 . \quad (1.95)$$

Aplicando logaritmo natural y diferenciando a la Ec.(1.95) obtenemos:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} = \left(\frac{d \ln P}{d \ln T} \right)_S . \quad (1.96)$$

En forma análoga, para eliminar P de Ec.(1.92),

$$T V^{\gamma-1} = C_3 . \quad (1.97)$$

Procediendo como antes sobre la Ec.(1.97),

$$\gamma - 1 = - \left(\frac{d \ln T}{d \ln V} \right)_S . \quad (1.98)$$

1.18. Exponentes de Chandrasekhar

En astrofísica es conveniente definir tres coeficientes adiabáticos, los cuales fueron introducidos por Chandrasekhar¹⁵. Por ser coeficientes adiabáticos estos corresponden a entropía constante. A partir de las Ecs.(1.92), (1.95) y (1.97) definimos:

$$\begin{aligned} P V^{\Gamma_1} &= C_1 , \\ P T^{\frac{\Gamma_2}{1-\Gamma_2}} &= C_2 \quad \text{y} \\ T V^{\Gamma_3-1} &= C_3 . \end{aligned} \quad (1.99)$$

Si en lugar del volumen $V[cm^3]$ utilizamos el volumen específico $V[cm^3/g]$, sólo cambian las constantes de los miembros derechos de las Ecs.(1.99), por lo tanto, también podemos escribir:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= - \left(\frac{d \ln P}{d \ln V} \right)_S , \\ \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} &= \left(\frac{d \ln P}{d \ln T} \right)_S \quad \text{y} \\ \Gamma_3 - 1 &= - \left(\frac{d \ln T}{d \ln V} \right)_S . \end{aligned} \quad (1.100)$$

Empleando en lugar del volumen específico la densidad ρ , con unidades g/cm^3 , esto es

$$\begin{aligned} V &= \rho^{-1} , \\ \ln V &= - \ln \rho , \\ d \ln V &= - d \ln \rho . \end{aligned}$$

Luego,

¹⁵Subrahmanyan Chandrasekhar: físico, matemático y astrofísico estadounidense de origen indio (1910-1995).

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_S, \\ \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} &= \left(\frac{d \ln P}{d \ln T} \right)_S \quad \text{y} \\ \Gamma_3 - 1 &= \left(\frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right)_S.\end{aligned}\tag{1.101}$$

Notar que para el gas ideal vale que $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \gamma$. A partir Ecs.(1.101)

$$\left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_S \cdot \left(\frac{d \ln \rho}{d \ln T} \right)_S \cdot \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_S = 1$$

usando Ecs.(1.101)

$$\Gamma_1 \cdot \frac{1}{\Gamma_3 - 1} \cdot \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = 1,$$

luego

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1}.$$

Notar que conociendo dos exponentes de Chandrasekhar podemos calcular el tercero. Los exponentes adiabáticos están asociados a cierto tipo de inestabilidades en las estrellas. El exponente adiabático Γ_1 está asociado a la determinación de inestabilidades dinámicas. El exponente Γ_2 está vinculado a criterios de inestabilidad para el transporte de energía en las estrellas

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \left(\frac{d \ln P}{d \ln T} \right)_S = \frac{1}{\nabla_{ad}}$$

donde ∇_{ad} es el gradiente adiabático. El exponente Γ_3 está relacionado con la inestabilidad pulsacional en las estrellas.

1.19. Entropía de un Gas Ideal

Vamos a calcular la entropía de un gas ideal para el caso de número de partículas igual a constante ($N = \text{cte}$). A partir de la PLT Ec.(1.8), el calor específico a volumen constante para un gas ideal Ec.(1.57), la variación de la entropía Ec.(1.21) y la EDE de un gas ideal Ec.(1.50) podemos escribir:

$$TdS = C_V dT + \frac{NkT}{V} dV$$

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + Nk \frac{dV}{V},$$

usando Ec.(1.61)

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + (C_p - C_V) \frac{dV}{V}$$

dividiendo por $C_p - C_V$

$$\frac{dS}{C_p - C_V} = \frac{C_V}{C_p - C_V} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V}$$

o también usando la definición del índice adiabático γ Ec.(1.88)

$$\frac{dS}{Nk} = \frac{C_V}{\gamma C_V - C_V} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V}$$

luego

$$dS = Nk \left(\frac{1}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right)$$

integrando

$$S = Nk \ln \left(V T^{\frac{1}{\gamma-1}} \right) + S_0 \quad (1.102)$$

Si el proceso ocurre en forma adiabática, entonces por Ec.(1.97) el argumento del logaritmo natural es constante

$$S = Nk \ln C + S_0 ,$$

luego la entropía S es constante.

1.20. Momento de Entropía en las Estrellas

En general los procesos astrofísicos son irreversibles. Luego por la desigualdad Ec.(1.23):

$$S(B) \geq S(A) ,$$

tenemos que

$$\frac{dS}{dt} \geq 0$$

es decir la entropía crece con el tiempo (t : tiempo) la tasa de pérdida de calor es:

$$\frac{dq}{dt} = T \frac{ds}{dt} \quad (1.103)$$

donde q y s , representan el calor y la entropía por gramo de materia. La cantidad dada por la Ec.(1.103) es tomada en cuenta en la ecuación de la luminosidad en las estrellas. (ver Ec.(??)).

1.21. Procesos Politrópicos

Un proceso politrópico es aquel en donde la capacidad térmica permanece constante. Por Ec.(1.2) tenemos

$$\frac{dQ}{dT} = C = \text{cte} . \quad (1.104)$$

Consideremos un gas ideal que realiza un proceso politrópico. A partir de la Ec.(1.104), la PLT Ec.(1.8), el calor específico a volumen constante y la EDE para un gas ideal, Ecs.(1.57) y (1.50), respectivamente, podemos escribir:

$$CdT = C_V dT + \frac{NkT}{V} dV$$

usando Ec.(1.61)

$$(C - C_V) \frac{dT}{T} = (C_P - C_V) \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dT}{T} = - \frac{C_P - C_V}{C_V - C} \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dT}{T} = - \frac{C_P - C + C - C_V}{C_V - C} \frac{dV}{V} = - \left(\frac{C_P - C}{C_V - C} - 1 \right) \frac{dV}{V}$$

definimos el exponente politrópico Γ como:

$$\Gamma = \frac{C_P - C}{C_V - C} \quad (1.105)$$

luego

$$\frac{dT}{T} + (\Gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$$

integrando

$$\ln T + \ln V^{\Gamma-1} = \ln C_1$$

luego

$$T V^{\Gamma-1} = C_1 \quad (1.106)$$

utilizando la EDE de un gas ideal como hicimos anteriormente para el γ adiabático, se obtienen las dos expresiones restantes:

$$P V^\Gamma = C_2 \quad \text{y} \quad (1.107)$$

$$T P^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}} = C_3 \quad (1.108)$$

1.21.1. Casos Límites para C

Los casos límites para la constante politrópica C son los siguientes:

- i) En una transformación politrópica a entropía S igual a constante, tenemos.

$$dQ = T dS = 0$$

Luego por Ec.(1.104), es $C = 0$, por Ec.(1.105) vale la siguiente identidad:

$$\Gamma = \frac{C_P}{C_V} = \gamma,$$

es decir, el exponente politrópico Γ es igual al exponente adiabático γ .

- ii) En una transformación isotérmica, tenemos que $dT = 0$, luego de Ec.(1.104), $C \rightarrow \infty$. Luego el exponente adiabático Γ vale la unidad¹⁶,

$$\Gamma_{isot} = 1 .$$

1.22. Mezcla de Gases

Una mezcla de varios gases está gobernada por leyes muy similares a aquellas que cumple un gas químicamente homogéneo. Supongamos que tenemos un recipiente con un cierto volumen en el cual hay una mezcla de gases a una dada temperatura T . Llamamos *presión parcial* de uno de los componentes de la mezcla, a la presión que dicho componente ejercería si ocupara él solo el mismo recipiente, encontrándose a la misma temperatura T . Los gases de una misma composición química se comportan como si las otras especies químicas no estuvieran. De acuerdo a esto la *Ley de Dalton*¹⁷ para una mezcla de gases dice:

Ley de Dalton: la presión ejercida por una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales de todos los componentes presentes en la mezcla.

Los gases ideales cumplen con esta ley, mientras que los gases reales lo hacen en forma aproximada.

Por Ecs.(1.63) y (1.64) tenemos

$$P = nkT \quad \text{y} \quad n = \frac{N}{V}, \quad \text{con} \quad [n] = \text{cm}^{-3},$$

con $[N]=\text{s/u}$, N , Número de partículas.

La unidad de masa atómica M_u o UMA en gramos se define como la inversa del número de Avogadro N_A luego:

$$M_u = \frac{1}{N_A} \quad [M_u] = \text{g} \quad (1.109)$$

y cuyo valor es $1,660\,540\,2(10) \times 10^{-24}$ g, en esta escala para las masas, el núcleo de ^{12}C tiene un peso atómico o molecular¹⁸ igual a 12. También se suele expresar a las masas en unidades de la masa del átomo de hidrógeno (^1H) cuyo valor es $m_{1\text{H}} = 1,673\,534\,4 \times 10^{-24}$ g.¹⁹

Como por Ec.(1.51) vimos que

$$k = \frac{R}{N_A},$$

entonces, por Ec.(1.109) vale que

$$k = R M_u . \quad (1.110)$$

¹⁶Veremos en la Sec.(?) que en la esfera isoterma, a partir de la EDE $P \propto \rho^\Gamma$ con $\rho = V^{-1}$ y $\Gamma = 1$, resulta que $P \propto \rho$.

¹⁷*John Dalton*: naturalista, químico, matemático y meteorólogo británico (1766-1844).

¹⁸La denominación *peso molecular* es histórica y alude, en este caso, a la masa de una sustancia en unidades de la UMA. Para los átomos es más apropiado llamarlo peso atómico. También puede expresarse en unidades de la masa $m_{1\text{H}}$. El origen de la denominación *peso atómico* fue introducido por vez primera por John Dalton y alude a como se obtenían originalmente sus valores.

¹⁹N. del A.: en mi apreciación prefiero expresarlo en unidades de UMA y no de $m_{1\text{H}}$ ya que la primera es una constante definida y por lo tanto es una invariante relativista. Si la masa viene expresada en unidades de $m_{1\text{H}}$, entonces el peso molecular del ^{12}C , en estas unidades, ya no es 12.

Si ρ es la densidad másica del gas ($[\rho]=\text{g}/\text{cm}^3$) y n la densidad numérica de partículas ($[n]=1/\text{cm}^3$), entonces

$$\rho = n m , \quad (1.111)$$

donde m es la masa de las partículas que componen el gas ($[m]=\text{g}$). Si μ es el peso molecular de las partículas ($[\mu]=\text{s/u}$) entonces la masa m de cada una de las partículas es:

$$m = \mu M_u . \quad (1.112)$$

Si damos en UMAs los pesos atómicos de los núcleos de ^1H , ^2H , ^3He y ^4He , estos son $\mu_{^1\text{H}} = 1,007825$, $\mu_{^2\text{H}} = 2,014102$, $\mu_{^3\text{He}} = 3,016029$ y $\mu_{^4\text{He}} = 4,002603$, respectivamente. Luego la densidad ρ la escribimos como:

$$\rho = n \mu M_u . \quad (1.113)$$

Reemplazando esta última en la EDE del gas ideal

$$P = \frac{\rho}{\mu M_u} k T , \quad (1.114)$$

donde la Ec.(1.114), es la EDE de un gas ideal cuyas partículas constitutivas tienen un peso molecular μ , densidad ρ a la temperatura T .

Supongamos que tenemos un sistema de partículas que está compuesto por una mezcla de gases ideales con presiones parciales P_i , densidades numéricas n_i a la temperatura de la mezcla T . Cada presión parcial está dada por:

$$P_i = n_i k T . \quad (1.115)$$

De acuerdo a la Ley de Dalton, la presión total P es:

$$P = \sum_i P_i = \sum_i n_i k T . \quad (1.116)$$

Supongamos que nuestra mezcla está constituida por partículas que pueden ser átomos neutros, iones y electrones de masa m_i con abundancias por masa \bar{n}_i dadas por:

$$\bar{n}_i = \frac{\rho_i}{\rho} , \quad [\bar{n}_i] = \text{s/u} \quad (1.117)$$

donde ρ_i es la densidad másica de la especie i

$$\rho_i = n_i m_i = n_i \mu_i M_u . \quad (1.118)$$

Luego, usando Ec.(1.117)

$$\rho \bar{n}_i = n_i m_i \quad (1.119)$$

Reemplazando n_i de esta última expresión en Ec.(1.116) obtenemos

$$P = \sum_i \frac{\bar{n}_i}{m_i} \rho k T \quad \text{y} \quad P = \frac{\rho}{\mu M_u} k T , \quad (1.120)$$

donde μ es el peso molecular medio de la mezcla dado por:

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \bar{n}_i \frac{M_u}{m_i} , \quad [\mu] = \text{s/u} \quad (1.121)$$

En los interiores estelares los átomos están totalmente ionizados de manera que tenemos núcleos y electrones libres. En este caso, cuando hablamos de los núcleos, la notación empleada no es \bar{n}_i , sino que es X_i y se la denomina *abundancia fraccional por masa* para el núcleo de la especie i , la cual se calcula como:

$$X_i = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad [X_i] = s/u \quad (1.122)$$

donde ρ_i y ρ son la densidad de los núcleos de la especie i y la densidad total de los núcleos, respectivamente. A X_i se la denomina también *abundancia fraccional másica*. Es costumbre no especificar todos los X_i , en general se da la abundancia de hidrógeno, helio y el resto de los elementos que denominamos “metales”. Esto es:

$$X = X_H, \quad Y = X_{He}, \quad Z = 1 - X - Y$$

Hay casos en donde se especifican las demás abundancias, como en el cálculo de reacciones nucleares donde es indispensable hacerlo, o en casos donde se desea indicar varias abundancias en particular, etc. Notar que llamamos metales a muchos otros elementos que no los son. Dentro de los metales entran los siguientes elementos químicos: alcalinos, alcalinotérreos, metales de transición, lantánidos, actínidos, metales del bloque p, no metales y gases nobles. En la Fig.(1.7) podemos observar en la parte superior, la tabla periódica de los elementos. Mientras que en la parte inferior ciertos elementos químicos para los cuales se indica su origen. Cuando hablamos de la metalicidad nos estamos refiriendo al valor de Z .

Por otro lado, se calcula también el índice de metalicidad. Este índice se lo define utilizando las líneas de absorción del hierro relativas a las líneas de absorción del hidrógeno. Se lo determina a partir de las abundancias relativas del hierro frente al hidrógeno de la estrella de estudio respecto al Sol. Esto es:

$$[Fe/H] = \log \left(\frac{n_{Fe}}{n_H} \right)_{\star} - \log \left(\frac{n_{Fe}}{n_H} \right)_{\odot} \quad (1.123)$$

El índice de metalicidad del Sol da:

$$[Fe/H]_{\odot} = 0,0$$

En la Tabla (1.22) listamos los valores de las densidades del hidrógeno y hierro obtenidas a partir de la fotosfera del Sol y de los meteoritos.

Elemento	Fotosfera	Meteoritos
$\log N_H$	12.00	8.22 ± 0.04
$\log N_{Fe}$	7.50 ± 0.04	7.45 ± 0.01

Cuadro 1.1: Valores de las abundancias obtenidos de [Grevesse et al. \(2010\)](#), con $[N_i] = \text{cm}^{-3}$ para valores de $(X, Y, Z) = (0.7380, 0.2485, 0.0134)$

1.22.1. Pesos Moleculares

Si escribimos la EDE de un gas totalmente ionizado de una mezcla de electrones libres y núcleos, la misma es

$$P = P_e + \sum_i P_i$$

Tabla Periódica de los Elementos

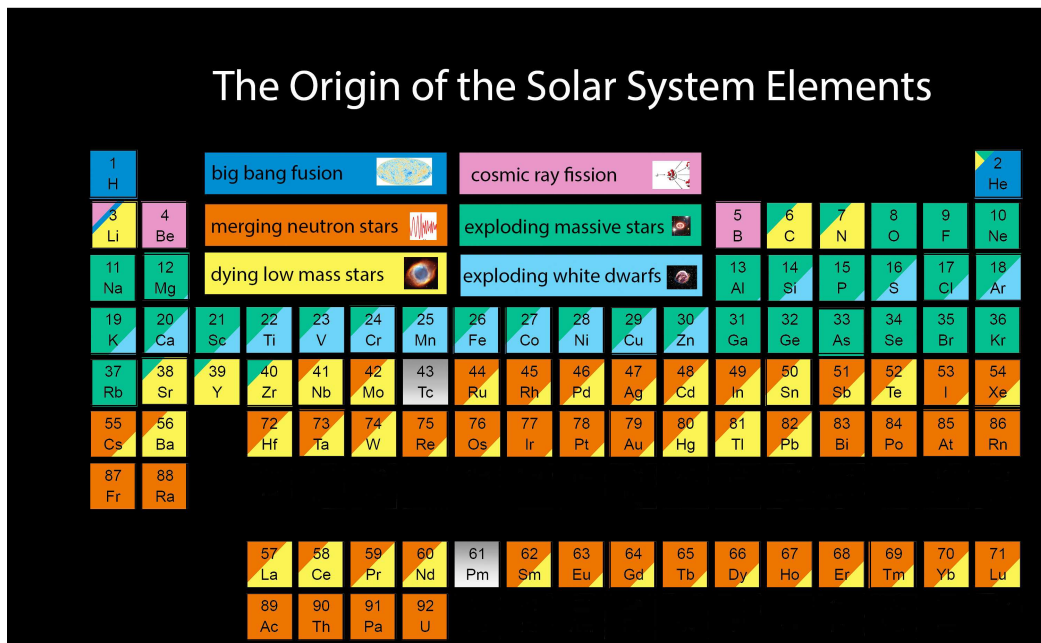
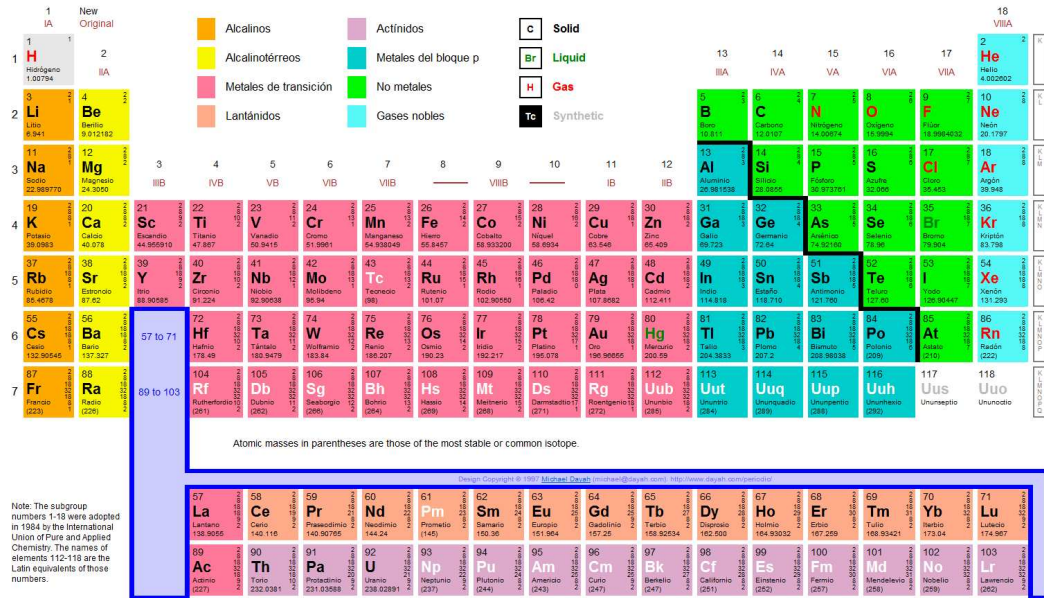


Figura 1.7: Panel superior: tabla periódica de los elementos. Panel inferior: elementos químicos indicando su origen (gráfico creado por Jennifer Johnson. Credits ESA/NASA/AASNova).

donde P_i es la presión ejercida por los núcleos de la especie i . Si suponemos que los electrones y los núcleos obedecen cada uno por separado la EDE de un gas ideal, esto es

$$P = n_e k T + \sum_i n_i k T \quad (1.124)$$

con n_e y n_i las abundancias numéricas de los electrones y los núcleos respectivamente. Puesto que la presión total es

$$P = n k T \quad (1.125)$$

donde n es el número total de partículas en la mezcla. Usando esta última expresión en la Ec.(1.124), obtenemos el número total de partículas n en la mezcla

$$n = n_e + \sum_i n_i$$

Cada átomo totalmente ionizado de la especie i contribuye con Z_i electrones, donde Z_i es también el número de protones de la misma especie. Esto se debe a que la carga total de la mezcla se la supone neutra. Entonces podemos escribir:

$$n = \sum_i Z_i n_i + \sum_i n_i = \sum_i (1 + Z_i) n_i \quad (1.126)$$

Usando las Ecs.(1.125) y (1.126) tenemos

$$P = n k T = \sum_i (1 + Z_i) n_i k T \quad (1.127)$$

por las Ecs.(1.113), (1.118) y (1.122)

$$\frac{1}{\mu} \frac{\rho k T}{M_u} = \sum_i (1 + Z_i) \frac{\rho_i}{\mu_i M_u} k T = \sum_i \frac{(1 + Z_i) X_i}{\mu_i} \frac{\rho k T}{M_u},$$

luego, a partir de esta última expresión, podemos definir el *peso molecular medio* como:

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{(1 + Z_i) X_i}{\mu_i}. \quad (1.128)$$

Por ejemplo, si tenemos un gas totalmente ionizado de hidrógeno puro hacemos lo siguiente. El peso molecular del hidrógeno $\mu_{1H} = 1,007825$, que podemos tomarlo como $\mu_{1H} \approx 1$, $X_{1H} = 1$, $Z_{1H} = 1$. Por lo tanto, el peso molecular medio del hidrógeno es $\bar{\mu}_{1H} \approx \frac{1}{2}$.

Para el caso de un gas completamente ionizado de helio puro. El peso molecular es $\mu_{4He} = 4,002603$, que lo aproximamos con $\mu_{4He} \approx 4$, $X_{4He} = 1$, $Z_{4He} = 2$. Luego, el peso molecular medio del helio es $\bar{\mu}_{4He} \approx \frac{4}{3}$.

En el caso de un gas de iones solamente (que es igual que la expresión de átomos neutros) se reemplaza $1 + Z_i$ por 1 en la Ec.(1.128). Luego, la expresión del *peso molecular medio para los iones*, μ_0 es:

$$\frac{1}{\mu_0} = \sum_i \frac{X_i}{\mu_i}. \quad (1.129)$$

Si queremos calcular el *peso molecular medio por electrón libre*, μ_e , entonces como cada átomo completamente ionizado de la especie i contribuye con Z_i electrones libres, tenemos que

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum_i \frac{X_i Z_i}{\mu_i}. \quad (1.130)$$

Podemos hacer una estimación aproximada de μ_e , si suponemos que tenemos núcleos simétricos para los elementos más allá del helio, esto es tenemos en el núcleo igual número de protones que de neutrones. Entonces como buena aproximación vale que $\frac{\mu_i}{Z_i} \approx 2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_e} &\approx X + \frac{Y}{2} + \frac{1}{2}(1 - X - Y) \\ \mu_e &\approx \frac{2}{1 + X}. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Notar que para el cálculo de μ_e se han despreciado los isótopos del hidrógeno y del helio.

1.23. Radiación y Materia

La presión en la estrella no sólo es debido a la presión realizada por el gas, sino que también los fotones contribuyen a la presión. Suponiendo que la radiación es ejercida por un cuerpo negro²⁰, entonces su valor es²¹:

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4, \quad (1.132)$$

donde a es la constante de radiación²² definida como:

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} \quad (1.133)$$

cuyo valor es $a = 7,56591(25) \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$. La constante a está relacionada con la constante de Stefan-Boltzmann σ , mediante:

$$a = \frac{4\sigma}{c} \quad (1.134)$$

con $\sigma = 5,67051(19) \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$, y $c = 2,99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ es la velocidad de la luz (ver Ec.(2.134)). La densidad de energía de radiación u_r viene dada por

$$u_{rad} = a T^4. \quad (1.135)$$

De esta manera, podemos escribir la EDE de una mezcla de un gas ideal y un gas de fotones de la siguiente manera

$$P = P_{gas} + P_{rad} = \frac{\rho}{\mu M_u} k T + \frac{1}{3} a T^4. \quad (1.136)$$

donde se usó la Ec.(1.114).

Definiendo a β como una medida de la importancia de la presión de radiación

$$\beta = \frac{P_{gas}}{P} \quad (1.137)$$

²⁰En Sec.(?) veremos en más detalle al concepto de cuerpo negro.

²¹Ver su deducción en Ec.(2.127).

²²La definiremos en la Sec.(2.16) Ec.(2.126)

de esta manera podemos escribir:

$$1 - \beta = \frac{P_{rad}}{P} \quad (1.138)$$

Por consiguiente, si $\beta = 1$ la presión de radiación es nula. Si $\beta = 0$ la presión del gas es nula. La definición realizada por Ec.(1.137) puede ser empleada para una gas no ideal. Si calculamos sus derivadas:

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial T}\right)_P = -\left[\frac{\partial}{\partial T}(1-\beta)\right]_P = -\frac{4}{T}(1-\beta) \quad (1.139)$$

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial P}\right)_T = -\left[\frac{\partial}{\partial P}(1-\beta)\right]_T = \frac{1}{P}(1-\beta) \quad (1.140)$$

Podemos escribir a P , la presión total, en función de β , por Ec.(1.137)

$$P = \frac{\rho}{\beta\mu M_u} kT \quad (1.141)$$

1.24. Entropía de un Gas de Fotones

En esta sección calcularemos cual es la entropía de un gas de fotones. Por la PLT

$$dU = T dS - P dV$$

Sea u la densidad de energía o energía por unidad de volumen, luego de esta última ecuación podemos escribir

$$\begin{aligned} T dS &= d(uV) + P dV = V du + u dV + P dV \\ dS &= du \frac{V}{T} + dV \frac{u+P}{T}, \end{aligned}$$

reemplazando Ecs.(1.132) y (1.135)

$$\begin{aligned} dS &= \frac{V}{T} 4aT^3 dT + dV \left[\frac{\frac{4}{3}aT^4}{T} \right] \\ dS &= 4aT^2 V dT + \frac{4}{3}aT^3 dV \end{aligned} \quad (1.142)$$

Pero por ser la entropía S una función de estado, entonces

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

Luego:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = 4aT^2 V \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{4}{3}aT^3 \quad (1.143)$$

integrando la segunda derivada de la Ec.(1.143):

$$S(T, V) = \frac{4}{3} a T^3 V + f(T)$$

derivando esta última respecto a T

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = 4 a T^2 V + \frac{df}{dT}$$

pero debe ser igual a la primera derivada de la Ec.(1.143). Luego $\frac{df}{dT} = 0$, es decir $f = \text{cte}$. Por lo tanto,

$$S(T, V) = \frac{4}{3} a T^3 V + S_0 \quad (1.144)$$

es la entropía de un gas de fotones. Para un proceso adiabático:

$$0 = dS = 4 a T^2 V dT + \frac{4}{3} a T^3 dV$$

dividiendo por $\frac{4}{3} a T^3 V$

$$3 \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0$$

integrando

$$\begin{aligned} T^3 V &= C \\ T V^{\frac{1}{3}} &= C' \end{aligned} \quad (1.145)$$

comparando con Ec.(1.99) debe ser:

$$\begin{aligned} \Gamma_3 - 1 &= \frac{1}{3} \\ \Gamma_3 &= \frac{4}{3} \end{aligned} \quad (1.146)$$

es decir, la radiación se comporta como un gas adiabático con $\Gamma_3 = \frac{4}{3}$.²³

1.25. Mezcla Adiabática de Gas Ideal y Radiación

Vamos a calcular los exponentes de Chandrasekhar Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 . Para el caso de una mezcla de gas ideal y radiación que realiza una transformación adiabática.

a) Cálculo de Γ_3 : Por la PLT en el caso adiabático.

$$\begin{aligned} dQ &= dU + P dV = 0 \\ dU_{rad} + dU_{gas} + P dV &= 0 \\ d(u_{rad} V) + C_V dT + P dV &= 0 \\ V du_{rad} + u_{rad} dV + C_V dT + P dV &= 0 \\ 4 a T^3 V dT + a T^4 dV + C_V dT + P dV &= 0 \end{aligned} \quad (1.147)$$

²³Veremos más adelante que un gas relativista tiene este mismo índice adiabático.

donde se usaron Ecs.(1.57) y (1.135). Vamos a transformar los primeros tres términos de la Ec.(1.147)

i. Usando Ecs.(1.132) y (1.138)

$$4aT^3 V dT = 12 \frac{aT^4 V}{3} d \ln T = 12(1-\beta) PV d \ln T .$$

ii. Usando Ecs.(1.132) y (1.138)

$$aT^4 dV = 3(1-\beta) P dV .$$

iii. Usando Ecs.(1.137), (1.50), (1.61) y (1.88)

$$C_V dT = C_V \frac{\beta P}{P_{gas}} dT = C_V \frac{\beta PV}{NkT} dT = \frac{C_V}{C_P - C_V} \beta PV d \ln T = \frac{1}{\gamma - 1} \beta PV d \ln T .$$

Reemplazando i, ii e iii en la Ec.(1.147) y dividiendo por PV

$$12(1-\beta) d \ln T + 3(1-\beta) \frac{dV}{V} + \frac{1}{\gamma - 1} \beta d \ln T + \frac{dV}{V} = 0 ,$$

multiplicando por $(\gamma - 1)$

$$12(1-\beta)(\gamma - 1) d \ln T + 3(1-\beta)(\gamma - 1) d \ln V + \beta d \ln T + (\gamma - 1) d \ln V = 0$$

$$(4 - 3\beta)(\gamma - 1) d \ln V + [\beta + 12(1-\beta)(\gamma - 1)] d \ln T = 0 , \quad (1.148)$$

por Ec.(1.100)

$$\Gamma_3 - 1 = - \left(\frac{d \ln T}{d \ln V} \right)_S = \frac{(4 - 3\beta)(\gamma - 1)}{\beta + 12(1-\beta)(\gamma - 1)} .$$

Luego

$$\Gamma_3 = 1 + \frac{(4 - 3\beta)(\gamma - 1)}{\beta + 12(1-\beta)(\gamma - 1)} \quad (1.149)$$

b) Cálculo de Γ_1 : La presión total debido a la mezcla de un gas ideal y radiación es:

$$P = \frac{NkT}{V} + \frac{1}{3} aT^4 ,$$

diferenciando:

$$dP = \frac{Nk}{V} dT - \frac{NkT}{V^2} dV + \frac{4}{3} aT^3 dT ,$$

multiplicando por $\frac{T}{P}$

$$\frac{T}{P} dP = \frac{NkT}{PV} dT - \frac{NkT}{PV} T \frac{dV}{V} + \frac{4}{P} \frac{1}{3} a T^4 dT,$$

por Ecs.(1.50), (1.137) y (1.138)

$$\begin{aligned} \frac{T}{P} dP &= \beta dT - \beta T \frac{dV}{V} + 4(1-\beta) dT \\ T \frac{dP}{P} &= (4-3\beta) dT - \beta T \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

$$d \ln P = (4-3\beta) d \ln T - \beta d \ln V, \quad (1.150)$$

despejando de esta última $d \ln T$ y reemplazando en Ec.(1.148)

$$\begin{aligned} (4-3\beta)(\gamma-1) d \ln V + [\beta + 12(1-\beta)(\gamma-1)] \frac{d \ln P + \beta d \ln V}{(4-3\beta)} &= 0 \\ \left[\frac{(4-3\beta)^2(\gamma-1)}{\beta + 12(1-\beta)(\gamma-1)} + \beta \right] d \ln V &= -d \ln P. \end{aligned} \quad (1.151)$$

por Ec.(1.100)

$$\Gamma_1 = - \left(\frac{d \ln P}{d \ln V} \right)_S = \beta + \frac{(4-3\beta)^2(\gamma-1)}{\beta + 12(1-\beta)(\gamma-1)} \quad (1.152)$$

c) Cálculo de Γ_2 : Por Ec.(1.100)

$$\Gamma_2 = \frac{\left(\frac{d \ln P}{d \ln T} \right)_S}{-1 + \left(\frac{d \ln P}{d \ln T} \right)_S}, \quad (1.153)$$

por Ec.(1.150)

$$\frac{d \ln P}{d \ln T} = (4-3\beta) - \beta \frac{d \ln V}{d \ln T},$$

por Ec.(1.148)

$$\begin{aligned} \frac{d \ln P}{d \ln T} &= (4-3\beta) + \beta \frac{[\beta + 12(1-\beta)(\gamma-1)]}{(4-3\beta)(\gamma-1)} \\ \left(\frac{d \ln P}{d \ln T} \right)_S &= \frac{(4-3\beta)^2(\gamma-1) + \beta^2 + 12\beta(1-\beta)(\gamma-1)}{(4-3\beta)(\gamma-1)}. \end{aligned}$$

Reemplazando esta última en la Ec.(1.153) y agrupando factores resulta:

$$\Gamma_2 = 1 + \frac{(4-3\beta)(\gamma-1)}{\beta^2 + 3(4+\beta)(1-\beta)(\gamma-1)} \quad (1.154)$$

Casos particulares:

- Si $\beta = 1$, es la presión total $P = P_{gas}$ y $P_{rad} = 0$.
- Si $\beta = 0$, es la presión total $P = P_{rad}$ y $P_{gas} = 0$.
- Si $\gamma = \frac{4}{3}$, los tres exponentes son iguales y valen $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \frac{4}{3}$ para $0 \leq \beta \leq 1$.

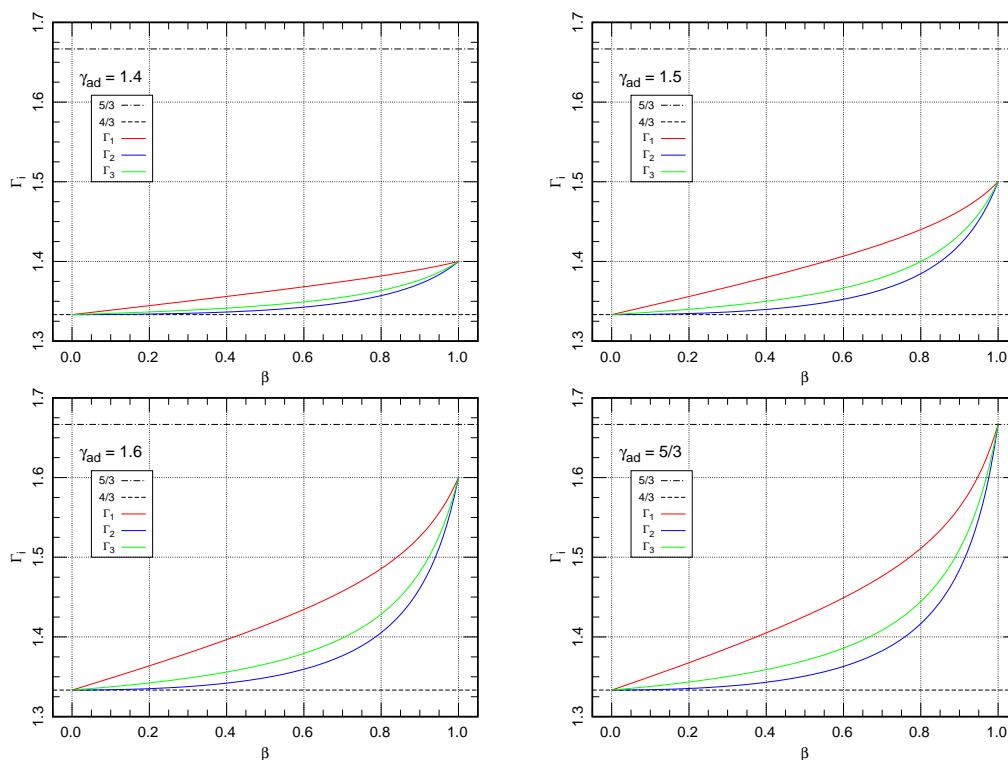


Figura 1.8: Exponentes de Chandrasekhar Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 , para cuatro valores distintos del índice adiabático γ iguales a 1.4, 1.5, 1.6 y $5/3$.

En la Fig.(1.8) vemos representados los tres exponentes de Chandrasekhar como función de β , para cuatro casos particulares de distintos valores del índice adiabático γ . Como podemos ver en el extremo izquierdo ($\beta = 0$) los valores de Γ_i coinciden con el valor $\frac{4}{3}$, mientras que en el extremo derecho de las figuras ($\beta = 1$), coincide con el valor del índice adiabático en cuestión.

1.26. Bibliografía en el Capítulo

El listado siguiente corresponde a la bibliografía consultada en este capítulo.

Callen (1985)

Chandrasekhar (1939)

Cox (2000)

Fermi (1956)

Huang (1987)

Kippenhahn et al. (2012)

Lang (1980)

Weiss et al. (2004)

Capítulo 2

Mecánica Estadística

2.1. Célula Cuántica: definición

En esta sección vamos a utilizar el concepto de partícula libre y la normalización de Born¹, para demostrar que la célula cuántica tiene un volumen de $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ en el espacio fase de 6-dimensiones, donde h es la constante de Planck, con valor $h = 6,626\,075\,5(40) \times 10^{-27}$ erg·s, y $\hbar = 1,054\,572\,66(63) \times 10^{-27}$ erg·s.

2.1.1. La Partícula Libre

En 1926, Schrödinger² concibe la ecuación de onda para una partícula cuántica bajo la acción de un potencial, la cual conduce a una descripción completa para los átomos y otros sistemas microscópicos. La *ecuación de Schrödinger* para una partícula que se mueve en un campo de energía potencial $V(\mathbf{r}, t)$ en 3-dimensiones es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right] \psi(\mathbf{r}, t)$$

Cuando la partícula se mueve en un potencial uni-dimensional independiente del tiempo $V(x)$, la ecuación de Schrödinger se transforma en

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t) \quad (2.1)$$

Cuando la energía potencial es constante, podemos encontrar fácilmente soluciones a la ecuación de Schrödinger. Por ejemplo, para una partícula moviéndose a lo largo del eje x bajo la acción de un potencial constante V_0 , la función de onda

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.2)$$

es solución de la Ec.(2.1), la misma es la expresión de una onda plana que se propaga hacia la derecha. Si reemplazamos a la función de onda Ec.(2.2) en la Ec.(2.1) da

$$\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 \quad (2.3)$$

¹Max Born: matemático y físico alemán (1882-1970).

²Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger: físico y filósofo austríaco (1887-1961).

En 1923, de Broglie³ propuso la posibilidad que partículas de materia, como los electrones, podrían ser simultáneamente partícula y onda. Propuso que una partícula de materia con impulso o momento p podría comportarse como una onda con longitud de onda

$$\lambda = \frac{h}{p} . \quad (2.4)$$

Esta longitud de onda es llamada *longitud de onda de de Broglie* y tiene un número de onda dado por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} ,$$

luego, su momento p tiene un valor de

$$p = \hbar k . \quad (2.5)$$

Reemplazando esta última en la Ec.(2.3)

$$\hbar \omega = \frac{p^2}{2m} + V_0 , \quad (2.6)$$

por lo tanto, la energía total vale

$$E = \hbar \omega , \quad (2.7)$$

o también

$$E = \frac{p^2}{2m} + V_0 . \quad (2.8)$$

Ahora, para el caso de la partícula libre vale $V_0 = 0$. Luego la energía de la partícula libre es:

$$E = \frac{p^2}{2m} . \quad (2.9)$$

2.1.2. Normalización de Born

La idea básica de la *normalización de Born* consiste en considerar al espacio, en el cual se propaga una onda plana, con propiedades de periodicidad en el espacio de coordenadas. Es decir, al espacio 3 – D (las 3 dimensiones para las coordenadas) se lo puede considerar como conformado por cajas iguales, una al lado de la otra, y dentro de cada una de estas cajas se repite precisamente lo que pasa en las otras. Las cajas son cubos de arista L y a cada uno se lo llama *cubo de normalización*.

Sin perder generalidad, vamos a considerar primero el caso unidimensional y después lo extendemos a tres dimensiones. En el caso unidimensional la condición de periodicidad podemos escribirla como:

$$\varphi(x) = \varphi(x + L)$$

Luego, como la función de onda $\psi(x, t)$ es periódica en el espacio, entonces:

³Príncipe Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie: físico francés (1892-1987).

$$\begin{aligned} A e^{ikx} &= A e^{ik(x+L)} \\ A e^{ikx} &= A e^{ikx} e^{ikL} . \end{aligned}$$

Luego,

$$e^{ikL} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{2\pi}{L}n \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, el momento y la energía dados por Ecs.(2.5) y (2.9), respectivamente, toman valores discretos luego

$$p = \frac{2\pi\hbar}{L}n \tag{2.10}$$

$$E = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}n^2 \tag{2.11}$$

2.1.3. Espacio Fase

El impulso de los electrones libres dentro de la caja de normalización de lado L es:

$$p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$$

por lo tanto, el número de estados cuánticos para la partícula libre que caben en el intervalo de impulsos comprendido entre p y $p + dp$ es

$$dn = \frac{L}{2\pi\hbar} dp .$$

Para el caso 3 – D en el espacio de los impulsos el número de estados en el intervalo d^3p donde $d^3p = dp_x dp_y dp_z$, resulta

$$d^3n = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 d^3p , \tag{2.12}$$

con $d^3n = dn_x dn_y dn_z$. Como $L^3 d^3p$ es un volumen en el espacio fase 6 – D . Entonces

$$d^3n = \frac{L^3 d^3p}{h^3} ,$$

luego, el volumen más pequeño en el espacio fase, será aquel en el cual al menos tengamos un estado cuántico $d^3n = 1$, por lo tanto:

$$L^3 d^3p = h^3 ,$$

es decir, el tamaño de la célula cuántica es:

$$h^3 = (2\pi\hbar)^3 .$$

Notar que la constante h tiene unidades de momento angular $[h] = \text{erg} \cdot \text{s} = \text{cm} \cdot \text{g cm/s}$, pues en un espacio 2 – D de coordenadas-impulsos es $h = dx dp$, representa un área en el plano $x - p$, y h es el área mínima en ese plano.

2.2. Densidad de Partículas

Vamos a calcular la densidad numérica de partículas n cuyas unidades son $[n] = cm^{-3}$. En la Ec.(2.12) vimos el número de estados en el espacio de impulsos para el intervalo $d^3 p$. Ahora, si suponemos que el nivel de energía tiene una degeneración g , entonces el número de estados energéticos accesibles para las partículas en un elemento de impulso $d^3 p$ será:

$$d^3 N' = g d^3 n$$

usando la Ec.(2.12)

$$d^3 N' = g d^3 n = g \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3 p .$$

donde $V = L^3$. Si $P(E)$ es la probabilidad de que una partícula esté en el estado de energía E y si $d^3 N$ es la cantidad de partículas que podemos acomodar según los niveles energéticos, entonces:

$$d^3 N = d^3 N' \cdot P(E)$$

$$d^3 N = \left\{ \begin{array}{l} \text{Números de estados} \\ \text{energéticos accesibles} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad} \\ \text{de ocuparlos} \end{array} \right\} .$$

Luego, la densidad numérica de partículas $d^3 n$ será

$$d^3 n = \frac{d^3 N}{V} .$$

Por lo tanto,

$$d^3 n = \frac{g d^3 p}{h^3} P(E) . \quad (2.13)$$

2.3. Gases de Fermi y de Bose

Las partículas elementales tienen spin el cual es un múltiplo de $\frac{1}{2}\hbar$. Mediante la mecánica cuántica y la mecánica estadística puede demostrarse que las partículas cuyo spin es un múltiplo par de $\frac{1}{2}\hbar$ obedecen la estadística de *Einstein-Bose*^{4 5}, y las partículas cuyo spin es un múltiplo impar de $\frac{1}{2}\hbar$ obedecen la estadística de *Fermi-Dirac*^{6 7}. En la estadística de Einstein-Bose (E-B) no hay límite para el número de partículas para cada estado cuántico, el gas que constituye este tipo de partículas se los denomina *gas de bosones*. En la estadística de Fermi-Dirac (F-D), el número de partículas para cada estado cuántico es 1 o 0, al gas de este tipo de partículas se los denomina *gas de fermiones*.

- *Gas de Fermi*: Son partículas idénticas e indistinguibles. Son fermiones los electrones, protones, neutrones, neutrinos, positrones, partículas μ y τ , etc.

⁴ *Albert Einstein*: físico alemán (1879-1955).

⁵ *Satyendra Nath Bose*: físico indio (1894-1974).

⁶ *Enrico Fermi*: físico italiano (1901-1954).

⁷ *Paul Adrien Maurice Dirac*: matemático, físico e ingeniero eléctrico británico (1902-1984).

- *Gas de Bose*: Son partículas idénticas e indistinguibles. Son bosones los fotones, núcleos α , núcleos del deuterio, núcleos estables de las partículas con número de masa par, bosones W y Z, bosón de Higgs, gluones, etc.

El número de ocupación para el estado energético E_j para un gas de fermiones es:

$$P(E_j) = \frac{1}{e^{(E_j - \mu)/kT} + 1} \quad \text{Estadística de } F - D, \quad (2.14)$$

y para un gas de bosones es

$$P(E_j) = \frac{1}{e^{(E_j - \mu)/kT} - 1} \quad \text{Estadística de } E - B, \quad (2.15)$$

donde μ es el potencial químico, k la constante de Boltzmann y T la temperatura⁸.

2.4. Parámetro de Degeneración

Definimos el parámetro de degeneración η como

$$\eta = \frac{\mu}{kT}, \quad (2.16)$$

con μ potencial químico, k constante de Boltzmann y T temperatura. El parámetro de degeneración se lo puede calcular a partir de la integración de la expresión para la densidad numérica de partículas, Ec.(2.13)

$$\int_n d^3 n = \int_{\mathbf{p}} \frac{g}{h^3} P(E_p) d^3 p,$$

donde hemos indicado con $E_p = E(p)$ a la energía cinética como función del módulo del impulso \mathbf{p} , esto es $p = |\mathbf{p}|$, como veremos más adelante (en Ec.(2.26)). Reemplazando $P(E_p)$ e integrando

$$n = \frac{g}{h^3} \int_{\mathbf{p}} \frac{1}{e^{-\eta + E_p/kT} \pm 1} d^3 p. \quad (2.17)$$

Como podemos ver, $\eta = \eta(n, T)$ implícitamente es función de n y T , la densidad numérica de partículas y la temperatura, respectivamente. Este parámetro nos indica cuan degenerada está la materia según los valores que tome⁹. Para:

- $-\eta \gg 1$: en este caso decimos que el gas es *no-degenerado*.
- $-2,6 < \eta < 4,4$: para estos valores de η decimos que el gas se encuentra *parcialmente degenerado*.
- $\eta \gg 1$: para el caso de valores grandes de η , decimos que el gas está *degenerado* y para el caso límite decimos que el gas está *totalmente degenerado*.

En la Fig.(2.1) vemos las curvas en donde η vale igual a constante. En esa figura podemos observar los valores de variación de η , la cual va desde -50 para valores de $\log(\rho/mu_e) \approx -6$ y $\log T \approx 12$, hasta valores de 5×10^{12} para $\log(\rho/mu_e) \approx 12$ y $\log T \approx -1$.

⁸La demostración formal de ambas estadísticas se verá en materias como *Mecánica Estadística* o *Interiores Estelares*

⁹Vamos a volver más adelante sobre este concepto.

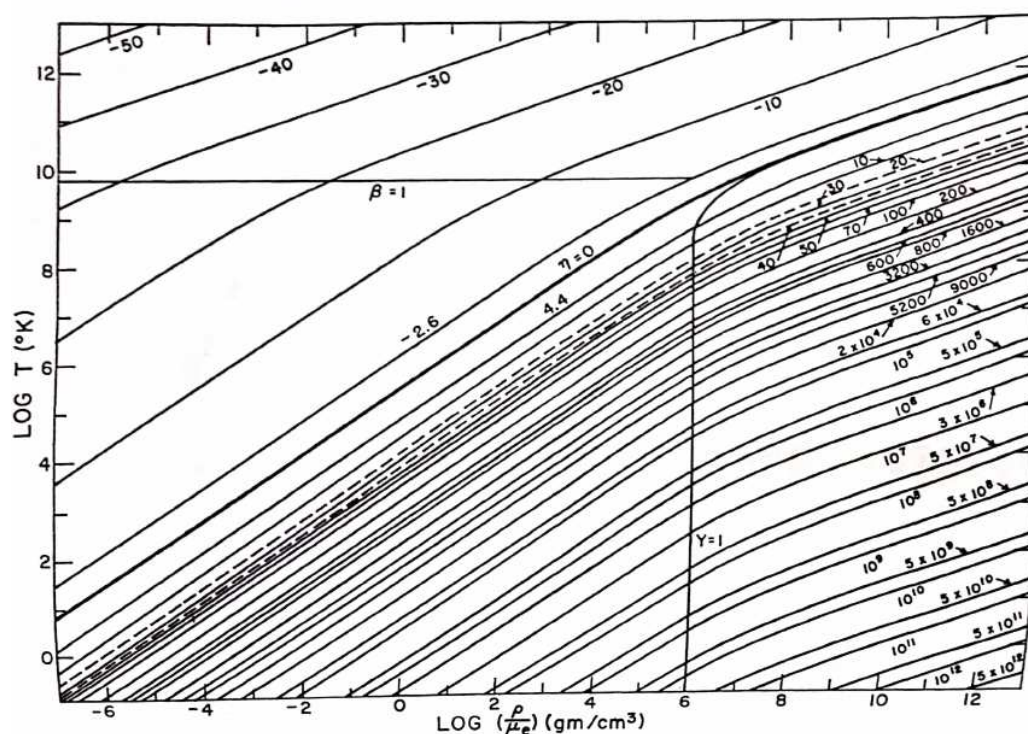


Figura 2.1: Diagrama $\log \rho$ vs $\log T$: se muestran curvas de igual degeneración, los valores sobre las curvas indican el valor de η (Fig. de Cox & Giuli (1968)).

2.5. Gas de Maxwell

Un gas clásico o gas de Maxwell¹⁰ está compuesto por partículas en un estado de no-degeneración, esto es cuando $-\eta \gg 1$. En este caso podemos desprejir el número “1” del denominador en ambas estadísticas cuánticas, es decir en las estadísticas de Fermi-Dirac y de Einstein-Bose, Ecs.(2.14) y (2.15).

Luego para un gas de Maxwell, para el estado E_j se tiene que:

$$P(E_j) = e^{-(E_j - \mu)/kT} \quad \text{Estadística de M - B,} \quad (2.18)$$

la cual es conocida como estadística de Maxwell-Boltzmann (M-B).

■ Gas de Maxwell:

Este gas está constituido por partículas idénticas, pero distinguibles.

2.6. Distribuciones: $P(E)$ vs E

A continuación, veremos como son las distribuciones $P(E)$ vs E , para las tres estadísticas.

¹⁰James Clerk Maxwell: físico y matemático británico (escocés) (1831-1879).

Maxwell-Boltzmann:

La distribución de Maxwell-Boltzmann es una exponencial válida para $-\eta \gg 1$, puede tomar cualquier valor de E y T .

Para esta distribución es: $-\eta \gg 1 \Rightarrow \eta < 0$.

Por Ecs.(2.18) y (2.16)

$$P(E) = e^{-E/kT+\eta} \quad (2.19)$$

La Fig.(2.2) muestra la distribución de M-B para una temperatura $T = 4 \times 10^6$ K, un potencial químico $\mu = -3447$ eV y $\eta = -10$. Para

$$E = 0 \Rightarrow P(0) = e^\eta = e^{-|\eta|},$$

es el punto máximo de la distribución de la Fig.(2.2). El punto en azul corresponde al valor $P(kT)$, donde $kT = 345$ eV.

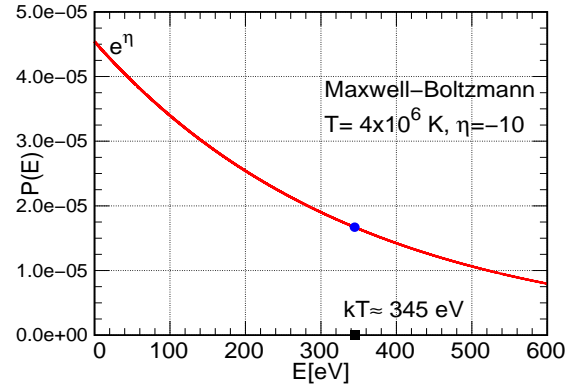


Figura 2.2: Estadística de Maxwell-Boltzmann

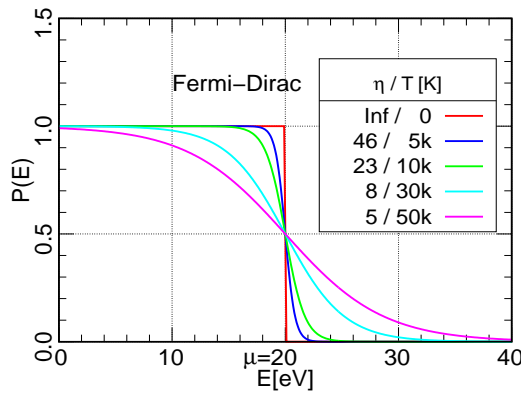


Figura 2.3: Estadística de Fermi-Dirac.

Se puede observar, como a menor temperaturas se van ocupando los niveles energéticos más bajos y desocupando los niveles superiores. A medida que aumenta la temperatura, ocurre lo contrario.

Einstein-Bose:

En esta estadística, para el caso de los fotones hay una gran ocupación de partículas para $E \ll kT$, decrece exponencialmente para $E \gg kT$.

En la Fig.(2.4) vemos para el caso de una distribución de fotones para una temperatura $T = 4 \times 10^6$ K. El punto azul en la figura, corresponde al valor $P(kT)$, donde $kT = 345$ eV (indicado sobre el eje de las abscisas con un cuadrado negro).

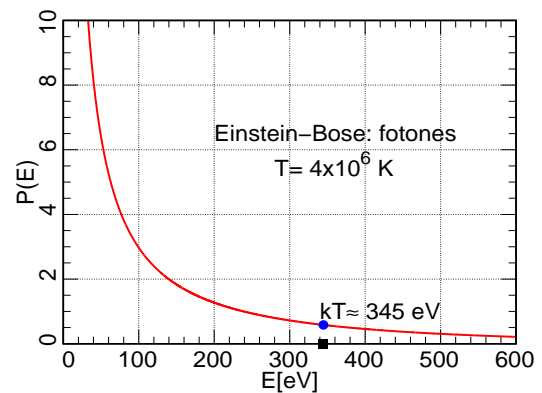


Figura 2.4: Estadística de Einstein-Bose.

2.7. Densidad de Partículas, Presión y Densidad de Energía

En los apartados siguientes vamos a calcular las expresiones para cualquier estadística de la *densidad numérica de partículas*, la *presión*, es decir la ecuación de estado para el gas, y la *densidad de energía*.

2.7.1. Densidad Numérica de Partículas

Calculemos la expresión integral de la densidad numérica de partículas. En la Ec.(2.13) obtuvimos la expresión diferencial de la densidad, dada por

$$d^3 n = \frac{g d^3 p}{h^3} P(E_p) ,$$

donde $d^3 p = dp_x dp_y dp_z$ y para un espacio en 3-D para coordenadas rectangulares. Si esta última expresión la pasamos a coordenadas esféricas, entonces

$$d^3 n = \frac{g}{h^3} P(E_p) p^2 \sin \theta dp d\theta d\phi . \quad (2.20)$$

En todos los casos vamos a suponer gases *isótropos*, esto es, no hay dependencia en E_p con la dirección del vector impulso \mathbf{p} ; sólo depende del módulo, dado por $p = |\mathbf{p}|$, es decir la coordenada “radial” en el espacio de impulsos. Por lo tanto, podemos integrar en la parte angular, esto es en θ y ϕ :

$$\int_n d^3 n = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{g}{h^3} P(E_p) p^2 \sin \theta d\theta d\phi dp , \quad (2.21)$$

$$n = \int_0^\infty n(p) dp = 4\pi \int_0^\infty \frac{g}{h^3} P(E_p) p^2 dp , \quad (2.22)$$

En su forma diferencial podemos escribirlo como

$$dn = n(p) dp = \frac{4\pi g}{h^3} P(E_p) p^2 dp , \quad [dn] = \text{cm}^{-3} . \quad (2.23)$$

Notar que en la Ec.(2.23) la cantidad $n(p)$ tiene unidades de número de partículas por unidad de volumen por intervalo de impulso. Para calcular la densidad numérica de partículas dada por Ec.(2.22), debemos conocer la estadística que corresponde, pero también la forma de la energía cinética E_p . A partir de la expresión de la *energía total relativista*:

$$E_{tot} = E + m_0 c^2 , \quad (2.24)$$

o también

$$E_{tot}^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 . \quad (2.25)$$

donde m_0 es la masa de las partículas en reposo que conforman el gas de la estadística que corresponda (todas las partículas son del mismo tipo) y c la velocidad de la luz. Usando las Ecs.(2.24) y (2.25), escribimos la *energía cinética* como

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 = E(p) \quad (2.26)$$

Por lo tanto, vemos con esta última ecuación, que la energía cinética E es función del impulso p . Es claro que esta energía cinética, es la energía correspondiente a las partículas

libres que conforman el gas. Como el gas es un gas ideal ¹¹ las partículas no interactúan entre sí, por eso las consideramos como partículas libres.

Para el caso de los fotones la Ec.(2.26) no es válida. En es caso es:

$$E_{tot} = E = p c = h \nu \quad (2.27)$$

donde h es la constante de Planck, c es la velocidad de la luz y ν la frecuencia.

2.7.2. Presión

Calculemos la expresión general para la presión P para un gas isótropo en términos del impulso p .

Supongamos que sobre una superficie inciden partículas con un impulso \mathbf{p} , con un cierto ángulo θ , respecto de la normal \hat{n} a la superficie, las cuales son reflejadas según se muestra en la Fig.(2.5). El cambio de momento que sufre la partícula al impactar sobre la superficie es:

$$\Delta p = p_f - p_i = p \cos \theta - (- \cos \theta) = 2p \cos \theta$$

donde p_i y p_f son los impulsos inicial y final, respectivamente, proyectados sobre la normal, ya que los vectores de incidencia y reflexión son coplanares. Luego, el momento transferido a la superficie es precisamente:

$$\Delta p_n = 2p \cos \theta \quad (2.28)$$

donde n indica la normal. Sea la función distribución $F(\theta, p)$ definida de la siguiente manera:

$$F(\theta, p) d\theta dp = \left\{ \begin{array}{l} \text{al número de partículas con impulso } p, \text{ en el rango } dp, \\ \text{golpeando la superficie por unidad de área, por unidad de} \\ \text{tiempo, desde todas las direcciones inclinadas un ángulo } \theta \\ \text{con respecto a la normal } \hat{n} \text{ en el rango } d\theta. \end{array} \right\}$$

Por segunda ley de Newton¹²

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

puesto que la presión se define como la fuerza por unidad de área, entonces

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} .$$

Si calculamos la presión en la unidad de área y en la unidad de tiempo, esto es $A = 1$ y $\Delta t = 1$, respectivamente, entonces

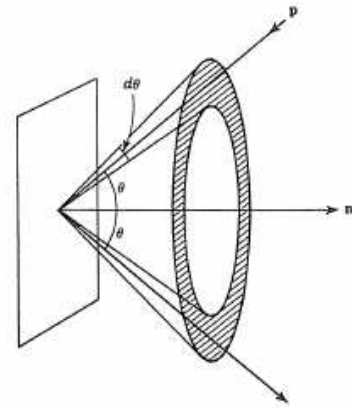


Figura 2.5: Partículas que inciden con impulso \mathbf{p} con un ángulo θ respecto de la normal \hat{n} , y se ven reflejadas con el mismo ángulo dentro del cono como se indica la figura (adaptación de Clayton (1968)).

¹¹No confundir con el gas ideal cuya ecuación es $PV = NkT$, sino que es un concepto más general, que también lo incluye.

¹²Isaac Newton: físico y matemático inglés (1643-1727).

$$P = \Delta p .$$

La presión para una sola partícula, por Ec.(2.28), será

$$P_{1 \text{ partíc.}} = 2p \cos \theta ,$$

luego, la contribución a la presión debido a todas las partículas es:

$$d^2 P = 2p \cos \theta F(\theta, p) d\theta dp .$$

Por lo tanto, la presión total será:

$$P = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} 2p \cos \theta F(\theta, p) d\theta dp . \quad (2.29)$$

Queremos calcular el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo $F(\theta, p) d\theta dp$. Para ello hacemos el producto de la densidad de partículas $n(\theta, p)$, contenidas en el volumen V , capaces de incidir en el área ΔA y en el intervalo de tiempo Δt , por el volumen V .

Sea V el volumen del prisma de la Fig.(2.6), el cual se haya inclinado un ángulo θ respecto a la normal, y cuya base es ΔA . Si las partículas se mueven con velocidad v_p , entonces $v_p \Delta t \cos \theta$ es la altura del prisma. Luego:

$$F(\theta, p) d\theta dp = \left\{ \begin{array}{c} \text{Densidad} \\ \text{de las} \\ \text{partículas} \\ n(\theta, p) \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \text{Volumen} \\ \text{del} \\ \text{prisma} \end{array} \right\} d\theta dp ,$$

por lo tanto,

$$F(\theta, p) d\theta dp = n(\theta, p) \Delta A v_p \Delta t \cos \theta d\theta dp .$$

Considerando la unidad de área y la unidad de tiempo, esto es $\Delta A = 1$ y $\Delta t = 1$, obtenemos:

$$F(\theta, p) d\theta dp = n(\theta, p) v_p \cos \theta d\theta dp . \quad (2.30)$$

Todavía nos falta calcular la expresión de $n(\theta, p)$. Para ello, consideremos un gas isótropo, esto es no depende del ángulo θ , pero sí de p . En este caso el número de partículas para un impulso dado es el mismo cualquiera sea la dirección, entonces

$$\frac{n(\theta, p) d\theta dp}{n(p) dp} = \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi}$$

$$n(\theta, p) d\theta dp = \frac{1}{2} n(p) \sin \theta d\theta dp \quad (2.31)$$

Reemplazando en la Ec.(2.29), las Ecs.(2.30) y (2.31)

$$P = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} p \cos^2 \theta v_p \sin \theta d\theta n(p) dp .$$

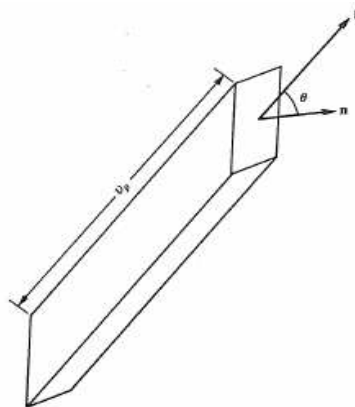


Figura 2.6: Prisma de base ΔA . Dentro de él se mueven partículas a una velocidad v_p . Su altura es $v_p \Delta t \cos \theta$ (adaptación de Clayton (1968)).

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{1}{3}, \quad \text{entonces}$$

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} p v_p n(p) dp. \quad (2.32)$$

La Ec.(2.32) es la expresión para la presión P para un gas isótropo compuesto de partículas que obedecen la estadística $P(E_p)$, donde E_p está dada por la Ec.(2.26) y $n(p)$ por la Ec.(2.23).

2.7.3. Velocidad como función de p

Vamos a calcular la expresión para la velocidad $v_p = v(p)$ de dos formas diferentes.

i) A partir de la ecuación de la energía total relativista, Ec.(2.25)

$$E_{tot}^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

o tambien,

$$E_{tot} = m c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.33)$$

con c velocidad de la luz, m_0 masa en reposo, y β dada por

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (2.34)$$

Reemplazando Ec.(2.33) en Ec.(2.25)

$$\begin{aligned} \frac{m_0^2 c^4}{1 - \beta^2} &= p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \\ m_0^2 c^4 &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(p^2 c^2 + m_0^2 c^4) \\ 0 &= p^2 c^2 - p^2 v^2 - m_0^2 c^2 v^2 \\ v^2(p^2 + m_0^2 c^2) &= p^2 c^2, \end{aligned}$$

luego

$$v^2 = \frac{p^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2} = \frac{p^2 c^4}{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

Por lo tanto, la expresión para la velocidad $v = v(p)$ es

$$v = \frac{p c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}. \quad (2.35)$$

ii) Utilizando la Ec.(2.26)

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 \quad (2.36)$$

$$E = m_0 c^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_0 c} \right)^2} - 1 \right],$$

derivando esta última expresión

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{m_0} \left[1 + \left(\frac{p}{m_0 c} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{m_0} \frac{\sqrt{m_0^2 c^2}}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} = \frac{p c}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} \frac{c}{c}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} = v. \quad (2.38)$$

2.7.4. Densidad de Energía

La densidad de energía cinética la calculamos de la siguiente manera. Sea $n(p)dp$ el número de partículas por unidad de volumen con impulsos entre p y $p + dp$, esas partículas tendrán una energía traslacional $E(p)$ dada por Ec.(2.26). Luego la energía interna del gas debido a la energía traslacional de los movimientos de las partículas es:

$$\varepsilon = \int_0^\infty E(p) n(p) dp \quad [\varepsilon] = \text{erg/cm}^3 \quad (2.39)$$

Donde ε es una densidad de energía, pues $n(p)dp$ es una densidad de partículas y E es una energía con unidades de $[E]=\text{erg}$, dada por:

$$E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2.$$

2.8. Gas de Fermiones

Vamos a volver sobre la estadística de Fermi-Dirac para analizar su comportamiento en los casos límites. Como sabemos la estadística de F-D viene dada por la expresión:

$$P(E) = \frac{1}{e^{-\eta+E/kT} + 1} = f(\eta, E/kT). \quad (2.40)$$

Calculemos la derivada de $f(\eta, E/kT)$ respecto a E :

$$\frac{\partial f}{\partial E}(\eta, E/kT) = -\frac{1}{kT} \frac{e^{-\eta+E/kT}}{(e^{-\eta+E/kT} + 1)^2}. \quad (2.41)$$

Tenemos dos puntos a resaltar sobre $f(\eta, E/kT)$ y su derivada.

- i. $f(\eta, E/kT) \leq 1$ para todos los valores de η y E/kT . Esto está de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli, el cual nos dice que no puede haber más de un electrón por cada estado cuántico.
- ii. $\frac{\partial f}{\partial E}(\eta, E/kT) \leq 0$ para todos los valores de η y E/kT , lo que nos dice que la función $f(\eta, E/kT)$ nunca crece con el aumento de E . Esto es, para cualquier valor de η y T los electrones tienden siempre a poblar los estados de energía bajos. Así, si la degeneración aumenta, los estados que son poblados primeramente son los de energía baja. Que la degeneración aumente significa que la densidad aumenta (ver Fig.(2.1)), concepto que reafirmaremos más adelante.

Como consecuencia de esto en el caso de alta degeneración la función

$$f(\eta, E/kT) \rightarrow 1$$

el máximo valor alcanzado. Por lo tanto, si el gas es no-degenerado deberá ser

$$f(\eta, E/kT) \ll 1$$

para todos los valores de $E/kT \geq 0$. Es decir son accesibles las celdas que tienen energía más baja en el espacio fase (por *i* e *ii*) y son levemente pobladas (por *i*). Luego, en la Ec.(2.40)

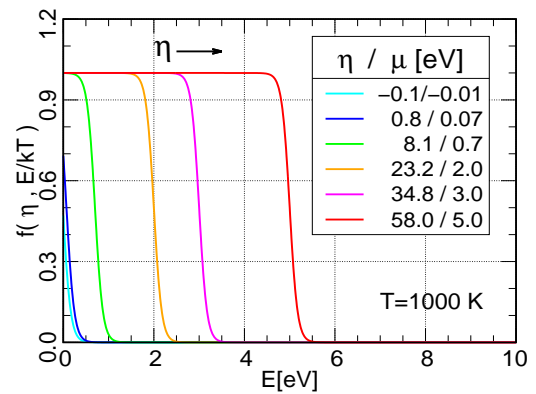


Figura 2.7: Ocupación de un gas de fermiones para $T=ccte$. Se indica en que sentido aumenta η .

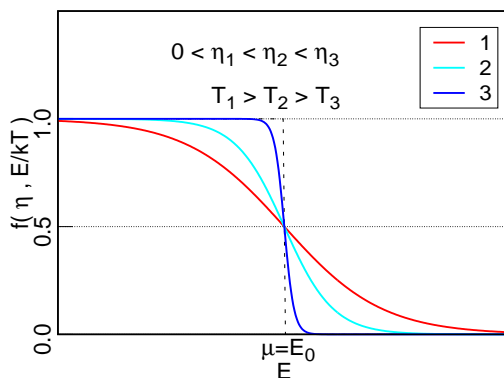


Figura 2.8: Ocupación según los valores de η y T .

Es por eso que para η grande y negativo la distribución obtenida es la de Maxwell-Boltzmann.

Por otro lado, alta degeneración significa que todos los niveles de energía bajos están completos hasta la vecindad de la energía E_0 , la cual está definida como:

$$\frac{E_0}{kT} = \eta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{-\eta+E/kT} + 1} &\ll 1 \\ 1 &\ll e^{-\eta+E/kT} + 1 \\ 0 &\ll e^{-\eta+E/kT} = e^{-\eta} e^{E/kT}, \\ 0 &\ll e^{-\eta}, \end{aligned}$$

pero como dijimos, es válido para todo valor de $E/kT \geq 0$, entonces será $-\eta \gg 1$. En astrofísica, no necesariamente debe tomar valores tan extremos, con un rango de $10 < -\eta < 50$ es suficiente, como puede

que es el valor de E que anula el exponente de la exponencial de la Ec(2.40). Luego:

$$\frac{E_0}{kT} = \eta = \frac{\mu}{kT} \Rightarrow E_0 = \mu$$

La Fig.(2.7), muestra la ocupación de las partículas de un gas de Fermi, en función de la energía E para temperatura constante ($T = 1000$ K). En cambio, en la Fig.(2.8) se observa como es la ocupación de los niveles energéticos pero para temperatura variable.

Para el caso límite en que $\eta \rightarrow \infty$, es decir $T \rightarrow 0$. La función $f(\eta, E/kT)$ vs. E , se convierte en una función escalón o función de Heaviside¹³

$$\lim_{T \rightarrow 0} f(\eta, E/kT) = H = \begin{cases} 1 & \forall E, 0 \leq E \leq \mu \\ 0 & \forall E, E > \mu \end{cases} \quad (2.42)$$

Esto ocurre cuando la degeneración es grande es decir para $\eta \rightarrow \infty$. En este caso, la energía vale $E_0 = \mu$, y se la denomina *energía de Fermi*, E_F , esto es:

$$E_0 = \mu = E_F.$$

Al impulso correspondiente a la energía de Fermi, se lo denomina *impulso de Fermi*, p_F . La energía de Fermi está definida sólo para el caso de degeneración completa, esto es $\eta \rightarrow \infty$ y $T = 0$.

Para este caso todos los niveles de energía inferiores están completos hasta el valor $E = E_F$. En el espacio de impulsos, los electrones tienen impulsos hasta $p = p_F$.



Figura 2.9: Función de Heaviside.

2.9. Densidad de Partículas a $T = 0$

A continuación vamos a calcular cual es la densidad de un gas de fermiones.

A partir de las Ecs.(2.22) y (2.40)

$$n = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty p^2 \frac{1}{e^{-\eta + E_p/kT} + 1} dp, \quad (2.43)$$

para el caso del gas de electrones, la degeneración g del nivel de energía es:

$$g = 2s + 1 \quad \text{con} \quad s = \frac{1}{2} \quad \text{gas de electrones} \quad (2.44)$$

para $T = 0$, debido a la función H , la integral se simplifica como sigue

$$n = \int_0^\infty n(p) dp = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp \quad (2.45)$$

ya que para el intervalo $[p_F, \infty)$ vale cero. Vemos en la Fig.(2.10) la dependencia del integrando de la Ec.(2.45) con el impulso p , para un gas de electrones a $T = 0$.

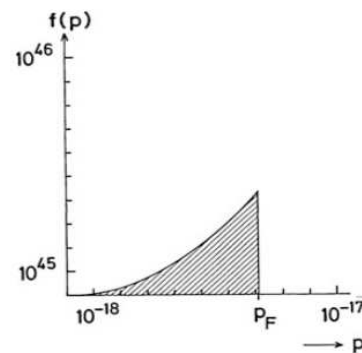


Figura 2.10: Función $f(p) = 8\pi p^2/h^3$, para $p \in [0, p_F]$ (en cgs), el área vale $n_e = 10^{28} \text{ cm}^{-3}$ (adaptación de Kippenhahn et al. (2012)).

¹³Oliver Heaviside: físico, matemático e ingeniero eléctrico inglés (1850-1925).

Luego para el gas de fermiones la densidad numérica de partículas es:

$$n = \frac{4\pi g}{3h^3} p_F^3 \quad (2.46)$$

y para los electrones:

$$n = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \quad (2.47)$$

A pesar que el impulso de Fermi se define para el caso de degeneración completa, la Ec.(2.46) es una identidad que especifica un impulso p_F , dado un valor de la densidad de fermiones n para un grado de degeneración arbitrario.

En la Fig.(2.11) se muestra con línea segmentada la distribución de fermiones a $T = 0$ ($\eta \rightarrow \infty$) y con línea llena para un grado bajo de degeneración ($\eta = 10$).

La expresión dada por la Ec.(2.46) es independiente de la forma de la energía. Por lo tanto no depende de si el gas de electrones es o no relativista (por ello se usa como definición para el impulso de Fermi).

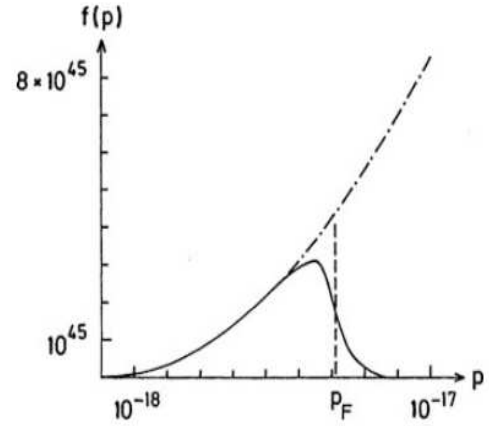


Figura 2.11: La línea con segmentos es el límite para $T = 0$, en línea llena para un gas con baja degeneración con valores $n_e = 10^{28} \text{ cm}^{-3}$, $T = 1,9 \times 10^7 \text{ K}$, $\eta = 10$ (adaptación de Kippenhahn et al. (2012)).

2.10. Impulso y Energía de Fermi

En esta sección vamos a relacionar al impulso de Fermi con la energía de Fermi. Como es sabido la energía cinética es función del impulso, entonces

$$E = E(p)$$

y cuando p es el impulso de Fermi p_F

$$E(p_F) = E = \mu .$$

A partir de las expresiones de la energía total relativista E_T dadas en Ecs.(2.24) y (2.25)

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E + m_0 c^2 , \\ E_{tot}^2 &= p^2 c^2 + m_0^2 c^4 . \end{aligned}$$

obtenemos

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} + 2 m_0 E$$

entonces para el impulso de Fermi podemos escribir

$$p_F^2 = \frac{E_F^2}{c^2} + 2m_0 E_F \quad (2.48)$$

A partir de la Ec.(2.26) para el impulso de Fermi podemos escribir:

$$E_F = E(p_F) = \sqrt{p_F^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 = \mu \quad (2.49)$$

Por lo tanto, a partir de la Ec.(2.46) si aumenta la densidad, mayor es el impulso de Fermi, p_F . Como consecuencia de ello ocurren dos situaciones: i) mayor es p_F , esto hace que las partículas puedan adquirir impulsos mayores (ya que el límite superior p_F es mayor), aumentan sus velocidades volviéndose más relativistas; ii) por otro lado a mayor p_F , por Ec.(2.49) mayor es el potencial químico, lo que hace que $\eta = \mu/kT$ aumente, es decir aumenta la degeneración.

De esta manera, dando un valor arbitrario para el grado de degeneración podemos obtener el impulso de Fermi.

Por otro lado, otra forma de que la degeneración aumente, es que disminuya la temperatura T , pues $\eta = \mu/kT$, y para $T \rightarrow 0$ la degeneración toma valores muy grandes haciendo que las partículas se vuelvan relativistas.

2.11. Presión del Gas a $T = 0$

Hemos visto por Ec.(2.32) que la presión de un gas de partículas con densidad $n(p)$ se puede calcular como

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v_p n(p) dp .$$

A partir de esta última expresión vamos a considerar tres casos: caso relativista, caso no-relativista y caso ultra-relativista.

2.11.1. Caso Relativista

A partir de la Ec.(2.23) y la expresión para la probabilidad de ocupar los niveles energéticos para un gas de fermiones Ec.(2.14)

$$n(p) = \frac{4\pi g}{h^3} p^2 \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} + 1} , \quad (2.50)$$

para los electrones $g=2$ (por Ec.(2.44)). Para $T = 0$ vale que

$$n(p) = \begin{cases} \frac{8\pi p^2}{h^3} & 0 \leq p \leq p_F \\ 0 & p > p_F . \end{cases}$$

Por Ec.(2.35)

$$v_p = \frac{p c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} .$$

Reemplazando, estas dos últimas expresiones

$$P = \frac{8\pi c^2}{3 h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4}{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} dp .$$

Para resolver la integral se realiza el siguiente cambio de variable. Definimos el *impulso normalizado* como

$$\sinh \theta = \frac{P}{m_0 c},$$

y definimos el *impulso de Fermi normalizado* como:

$$\sinh \theta_F = \frac{p_F}{m_0 c} = x. \quad (2.51)$$

La integral tiene solución analítica:

$$P = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3 h^3} f(x), \quad (2.52)$$

con m_0 la masa del electrón en reposo, y

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(1 + x^2)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} x \quad (2.53)$$

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \quad (2.54)$$

2.11.2. Caso No-relativista

Para calcular la presión no-relativista debemos hacer un desarrollo de Taylor para

$$x = \frac{p_F}{m_0 c} \rightarrow 0,$$

de $f(x)$, cuyo resultado es

$$f(x) \approx \frac{8}{5} x^5. \quad (2.55)$$

Luego

$$P = \frac{8\pi}{15 h^3 m_0} p_F^5, \quad (2.56)$$

usando la Ec.(2.47)

$$n = \frac{8\pi}{3 h^3} p_F^3,$$

podemos escribir la presión en función de la densidad numérica de partículas, donde n corresponde a la densidad electrónica n_e . Luego

$$P = \frac{h^2}{5 m_0} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} n^{5/3}. \quad (2.57)$$

La Ec.(2.57) es la ecuación de estado de un gas de Fermi no-relativista a $T = 0$. Notar que en este caso es:

$$P \propto n^{5/3}.$$

Vimos por Ec.(1.101), uno de los exponentes de Chandrasekhar

$$\Gamma_1 = \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_S.$$

Pero como $\rho = n_e \mu_e M_u$ (que demostraremos en Sec.(2.13), Ec.(2.81)) es la densidad má- sica total con densidad numérica electrónica n_e y peso molecular por electrón μ_e . Luego, en Ec.(2.57) es:

$$\begin{aligned} P &= C \rho^{5/3}, \\ \ln P &= \ln C + \frac{5}{3} \ln \rho. \end{aligned}$$

Luego en la expresión de Γ_1 escribimos:

$$\Gamma_1 = \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_S = \frac{5}{3}, \quad (2.58)$$

es decir, $\Gamma_1 = \frac{5}{3}$ es el exponente de Chandrasekhar de un objeto no-relativista.

2.11.3. Caso Ultra-relativista

Como es sabido el impulso está dado por

$$p = m v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} v \quad \text{con} \quad \beta = \frac{v}{c},$$

$$v \rightarrow c \quad \Rightarrow \quad p \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad p_F \rightarrow \infty.$$

Entonces, en este caso el impulso normalizado de Fermi tiende a valores grandes

$$x = \frac{p_F}{m_0 c} \rightarrow \infty,$$

para $x \rightarrow \infty$, la función $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ diverge logarítmicamente. Luego en $f(x)$ Ec.(2.53), cuando $x \rightarrow \infty$ es

$$f(x) \approx 2 x^4. \quad (2.59)$$

Luego

$$P = \frac{2\pi c}{3 h^3} p_F^4, \quad (2.60)$$

usando la Ec.(2.47), se obtiene:

$$P = \frac{h c}{4} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} n^{4/3}. \quad (2.61)$$

La Ec.(2.61) es la ecuación de estado de un gas de Fermi ultra-relativista a $T = 0$. En este caso es:

$$P \propto n^{4/3}.$$

Luego, en el exponente de Chandrasekhar Γ_1

$$\Gamma_1 = \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_S = \frac{4}{3}. \quad (2.62)$$

El coeficiente $\Gamma_1 = \frac{4}{3}$ es el exponente de Chandrasekhar para un objeto ultra-relativista. $\Gamma_1 = \frac{4}{3}$ representa un objeto que está al borde de la inestabilidad, al borde del colapso.

2.12. Densidad de Energía Cinética a $T = 0$

A partir de la Ec.(2.39), la cual es la ecuación de la densidad de energía cinética de un gas de partículas, cuya densidad de partículas es $n(p)$

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} E(p) n(p) dp ,$$

donde

$$E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 .$$

y

$$n(p) = \frac{8\pi}{h^3} p^2 \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} + 1} ,$$

Como antes, vamos a considerar tres casos: caso relativista, caso no-relativista y caso ultra-relativista para $T = 0$.

2.12.1. Caso Relativista

Para el caso de $T = 0$ es:

$$\varepsilon = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{P_F} [\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2] p^2 dp ,$$

Al igual que antes, realizamos el mismo cambio de variable:

$$\sinh \theta = \frac{p}{m_0 c} \quad \text{y} \quad \sinh \theta_F = \frac{P_F}{m_0 c} = x .$$

En este caso, la integral también tiene solución analítica y da

$$\varepsilon = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3 h^3} g(x) , \tag{2.63}$$

con

$$g(x) = 8 x^3 [(1 + x^2)^{1/2} - 1] - f(x) \tag{2.64}$$

2.12.2. Caso No-relativista

En este caso también

$$x = \frac{P_F}{m_0 c} \longrightarrow 0 ,$$

haciendo un desarrollo de Taylor en $x = 0$ para $g(x)$

$$g(x) \approx \frac{12}{5} x^5 . \tag{2.65}$$

Reemplazando en la Ec.(2.63) da

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{5 h^3 m_0} P_F^5 , \tag{2.66}$$

Usando la Ec.(2.56) obtenemos la siguiente igualdad:

$$\varepsilon = \frac{3}{2} P . \quad (2.67)$$

usando la Ec.(2.47) en la Ec.(2.66)

$$\varepsilon = \frac{3}{10} \frac{h^2}{m_0} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} n^{5/3} . \quad (2.68)$$

2.12.3. Caso Ultra-relativista

Nuevamente, aquí vale que

$$x = \frac{p_F}{m_0 c} \longrightarrow \infty ,$$

luego, en Ec.(2.64) da

$$g(x) \approx 8x^4 - 2x^4 = 6x^4 . \quad (2.69)$$

Reemplazando en Ec.(2.63)

$$\varepsilon = \frac{2\pi c}{h^3} p_F^4 , \quad (2.70)$$

y reemplazando en Ec.(2.60) da

$$\varepsilon = 3 P . \quad (2.71)$$

usando la Ec.(2.47), se obtiene:

$$\varepsilon = \frac{3hc}{4} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} n^{4/3} . \quad (2.72)$$

2.13. Ecuación de Estado

Ahora, ya estamos en condiciones de escribir la ecuación de estado para la materia estelar con radiación. Supongamos que nuestro modelo es una mezcla de iones, electrones y radiación. vamos a calcular en primer instancia la densidad de la materia ρ .

Supongamos que la especie i puede no estar totalmente ionizada, entonces la cantidad v_i representa la fracción de ionización. Hemos visto que la densidad de los iones de la especie i , llamada $\rho_{ion,i}$, puede calcularse como:

$$\rho_{ion,i} = \rho X_i$$

$$\rho_{ion,i} = n_{ion,i} \mu_i M_u \quad \text{con} \quad M_u = \frac{1}{N_A} .$$

Luego,

$$n_{ion,i} = \rho \frac{X_i}{\mu_i} N_A . \quad (2.73)$$

Luego, el número total de iones será sumando sobre todas las especies

$$n_{ion} = \sum_i n_{ion,i} = \rho N_A \sum_i \frac{X_i}{\mu_i} . \quad (2.74)$$

Usando el peso molecular medio de los iones,

$$\frac{1}{\mu_{ion}} = \sum_i \frac{X_i}{\mu_i} ,$$

entonces

$$n_{ion} = \frac{\rho N_A}{\mu_{ion}} . \quad (2.75)$$

Supongamos que la especie i contribuye con $n_{e,i}$ electrones, donde

$$n_{e,i} = \nu_i Z_i n_{ion,i} , \quad (2.76)$$

donde si $\nu_i = 1$ significa que la especie i está totalmente ionizada y si $\nu_i = 0$ implica que está completamente neutra. En el caso de la ionización parcial es $0 < \nu_i < 1$. Luego, por Ec.(2.73)

$$n_{e,i} = \nu_i Z_i \rho \frac{X_i}{\mu_i} N_A . \quad (2.77)$$

La densidad total de electrones será:

$$n_e = \sum_i n_{e,i} = \rho N_A \sum_i \nu_i \frac{Z_i X_i}{\mu_i} \quad (2.78)$$

Luego el peso molecular medio por electrón libre μ_e , es:

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum_i \nu_i \frac{Z_i X_i}{\mu_i} . \quad (2.79)$$

Luego, la densidad electrónica será por Ecs.(2.78) y (2.79).

$$n_e = \frac{\rho N_A}{\mu_e} . \quad (2.80)$$

Esta relación importante nos permite calcular la densidad ρ a partir de la densidad electrónica y el peso molecular medio por electrón. Por supuesto debe haber electrones libres en la mezcla. Luego:

$$\rho = n_e \mu_e M_u \quad (2.81)$$

Usando la Ec.(2.43)

$$\rho = \frac{8\pi M_u}{h^3} \mu_e \int_0^\infty p^2 \frac{1}{e^{-\eta + E_p/kT} + 1} dp , \quad (2.82)$$

luego la ecuación de estado para una mezcla de materia y radiación será:

$$P = P_{ion} + P_e + P_{rad} . \quad (2.83)$$

La ecuación de estado para los iones en las estrellas, es la ecuación de estado del gas ideal, los iones se comportan de esta manera aún en estados extremos de la materia como en las enanas blancas.

$$P_{ion} = n_{ion} k T = \frac{\rho}{\mu_{ion} M_u} k T . \quad (2.84)$$

La presión de radiación dada por

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4 ,$$

así, la ecuación para la presión total de una mezcla de radiación y materia la podemos escribir como

$$P = \frac{\rho}{\mu_{ion} M_u} k T + \frac{8\pi}{3 h^3} \int_0^\infty p^3 v_p \frac{1}{e^{-\eta + E_p/kT} + 1} dp + \frac{1}{3} a T^4 , \quad (2.85)$$

con E_p dada por:

$$E_p = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 ,$$

la velocidad v_p dada por

$$v_p = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$$

con m_0 la masa del electrón en reposo y ρ dada por Ec.(2.82).

2.14. Diagrama Densidad-Temperatura

Podemos determinar ciertas regiones en el plano $\log \rho$ vs $\log T$ según el dominio de las distintas presiones de acuerdo a las diferentes ecuaciones de estado. Para obtener los “límites” entre las distintas regiones se realiza lo que hacemos a continuación. A partir de las siguientes ecuaciones de estado:

- i. Presión de Radiación: La ecuación de estado para un gas de fotones es:

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4 . \quad (2.86)$$

- ii. Presión de un Gas Ideal: La ecuación de estado de un gas no-degenerado no-relativista es:

$$P = \frac{\rho}{\mu M_u} k T . \quad (2.87)$$

- iii. Presión de un Gas de Electrones Degenerado No-relativista: por Ec.(2.57) y usando que $\rho = n_e \mu_e M_u$ obtenemos:

$$P = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (2.88)$$

donde K_1 es una constante.

- iv. Presión de un Gas de Electrones Degenerado Ultra-relativista: por Ec.(2.61) y usando que $\rho = n_e \mu_e M_u$ obtenemos:

$$P = K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad (2.89)$$

donde K_2 es una constante.

Realizamos las siguientes igualdades para obtener los límites en el plano $\log \rho - \log T$.

- a. Igualando *i* e *ii*, esto es Ec.(2.86) y (2.87)

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\mu M_u} k T &= \frac{1}{3} a T^4 \\ \rho &= C_1 T^3 \\ \log T &= \frac{1}{3} \log \rho + D_1 \end{aligned} \quad (2.90)$$

- b. Igualando *ii* e *iii*, esto es Ec.(2.87) y (2.88)

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\mu M_u} k T &= K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \\ T &= C_2 \rho^{2/3} \\ \log T &= \frac{2}{3} \log \rho + D_2 \end{aligned} \quad (2.91)$$

- c. Igualando *iii* e *iv*, esto es Ec.(2.88) y (2.89)

$$\begin{aligned} K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} &= K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \\ \rho^{1/3} &= C_3 \\ \log \rho &= D_3 \end{aligned} \quad (2.92)$$

De esta manera obtuvimos tres rectas en el diagrama $\log \rho - \log T$ con pendientes $1/3$, $2/3$ e infinita, que separan cuatro sectores en ese plano, determinando así regiones para las distintas EDEs. Notar que las igualdades realizadas en algunos casos carecen de sentido. En el inciso *a*, a pesar que una EDE es para un gas de fotones y la otra es la EDE del gas ideal, sólo indica que habrá algún valor para la presión en donde ambas presiones valgan lo mismo. En el inciso *b*, se igualan las EDEs de dos regímenes diferentes uno no-degenerado y otro degenerado, esto carece de sentido. Sin embargo, se hace para obtener la recta de separación entre las regiones. Y por último, en el inciso *c*, se igualan las EDEs de un gas no-relativista con otro ultra-relativista, ambos gases degenerados, aquí también lo hecho carece de sentido pues igualamos EDEs de dos extremos relativistas opuestos.

En la Fig.(2.12), se muestran dos diagramas. En la figura superior, se muestra la evolución central de un modelo estelar con masa inicial de $2.7 M_\odot$, en el diagrama $\log \rho - \log T$. Se

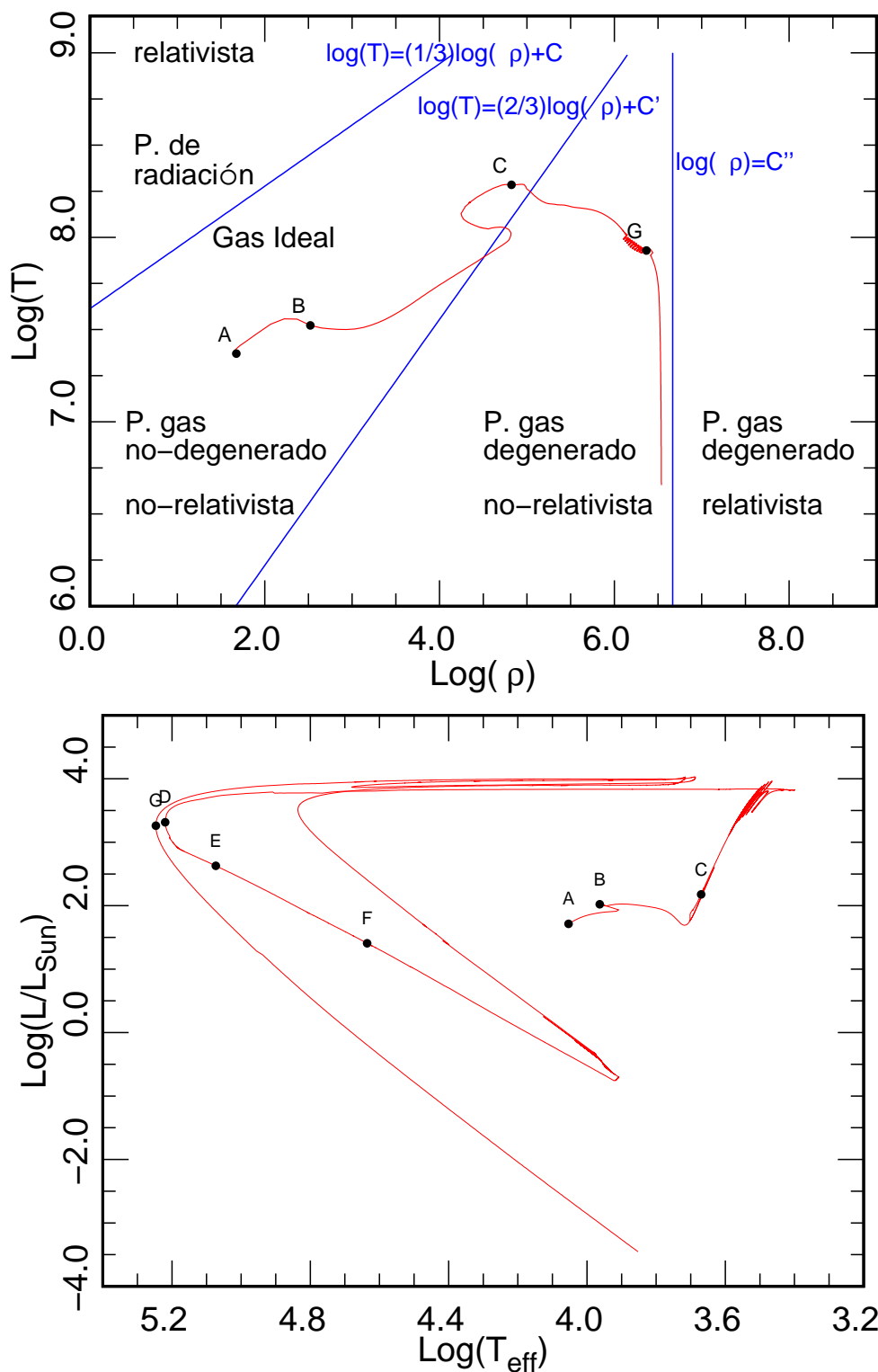


Figura 2.12: *Diagramas $\log \rho - \log T$ y HR.* Panel superior: se muestra el diagrama $\log \rho - \log T$ de la evolución central de una estrella con una masa inicial de $2.7 M_{\odot}$, desde la secuencia principal hasta el estado final de enana blanca. Se indican las tres rectas que definen las cuatro regiones para las EDEs. Panel inferior: se muestra el diagrama de Hertzsprung-Russell, correspondiente al mismo modelo estelar. Las letras que se indican en ambas figuras representan el mismo estado evolutivo (Panei, J.A. (2004) en el dominio [SEDIC-UNLP Tesis doctoral.](#))

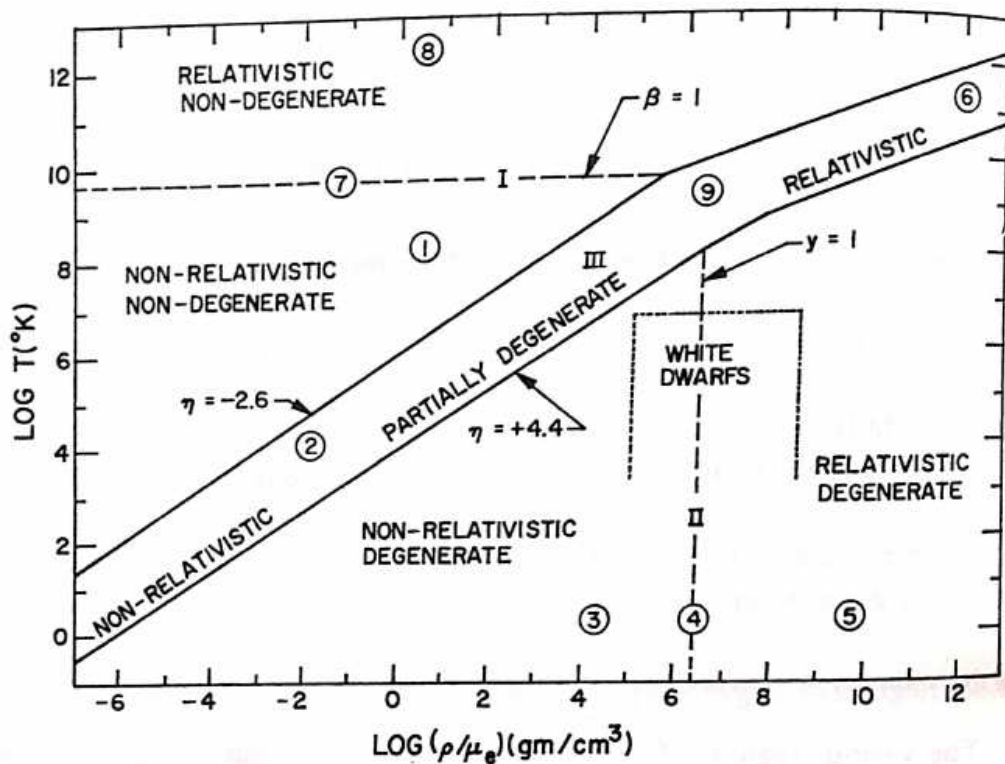


Figura 2.13: Diagrama $\log \rho$ vs $\log T$: se muestran las distintas regiones según el dominio de las diferentes EDEs (Fig. de Cox & Giuli (1968)).

indican las regiones de dominio del gas relativista y no-relativista, y para el gas degenerado y no-degenerado. También están indicadas las tres rectas de separación de regímenes para las distintas EDEs, como así también el dominio de las presiones de radiación y del gas ideal.

En la figura inferior, se muestra el diagrama HR del mismo modelo estelar. Las letras de ambos diagramas corresponden a los mismos estados evolutivos. Las letras que faltan en el diagrama densidad-temperatura, es debido a que esas etapas evolutivas están muy próximas en esa figura, por eso no se muestran todas las letras.

En la Fig.(2.13), se muestra las regiones de no-degeneración, degeneración parcial y degeneración del gas. Las regiones del gas relativista y no-relativista.

2.15. Potencial Químico para los Fotones

Consideremos un sistema formado por r subsistemas, donde cada subsistema está constituido por N_i moles, el número de moles de la especie i , con $i = 1, \dots, r$. Luego por la primera ley de la termodinámica para el caso en que el número de moles N_i no es constante, tenemos por Ec.(1.38):

$$dU = T dS - P dV + \sum_{i=1}^r \mu_i \cdot dN_i \quad (2.93)$$

donde dU es la variación de energía interna, $T \cdot dS$ es el calor absorbido por el sistema, $-P \cdot dV$ es el trabajo realizado por el sistema y $\sum_{i=1}^r \mu_i \cdot dN_i$ es el trabajo químico cuasi-estático.

Las siguientes cantidades termodinámicas representan: T , la temperatura, S la entropía, P la presión, V el volumen y μ_i el potencial químico para la componente i .

Por ser G una función de estado entonces es diferenciable. Luego diferenciando la Ec.(1.78) tenemos:

$$dG = dU - T dS - S dT + P dV + V dP \quad (2.94)$$

reemplazando en la Ec.(2.94) la Ec.(2.93), tenemos:

$$dG = -S dT + V dP + \sum_{i=1}^r \mu_i dN_i \quad (2.95)$$

luego por el Teorema 1.7, en equilibrio termodinámico la energía libre de Gibbs G , es un mínimo, y además estamos a presión y temperatura constantes, luego:

$$dG = 0, \quad dP = 0, \quad dT = 0 \quad (2.96)$$

reemplazando las Ecs.(2.96) en la Ec.(2.95) se obtiene

$$\sum_{i=1}^r \mu_i \cdot dN_i = 0.$$

Esta última relación es válida en equilibrio termodinámico a presión y temperatura constantes. En ausencia de reacciones nucleares, el número de partículas por mol de la especie i , N_i , es constante. Luego para cada i vale que $dN_i = 0$. Pero, puede darse que $dN_i \neq 0$, como ocurre por ejemplo, para el caso de los fotones que interactúan con la materia. Aún en equilibrio termodinámico, vale que $dN_i \neq 0$. Ahora bien, si sólo tenemos un gas de fotones, entonces $r = 1$, luego:

$$\mu_{\text{fot}} \cdot dN_{\text{fot}} = 0.$$

donde fot indica que es para los fotones solamente. Esta relación se cumple, si y sólo si:

$$\mu_{\text{fot}} = 0, \quad (2.97)$$

ya que $dN_{\text{fot}} \neq 0$.

2.16. Gas de Fotones

2.16.1. Densidad de un Gas de Fotones

La densidad numérica de partículas está dada por:

$$n = \int_0^{\infty} n(p) dp$$

con $n(p)$, el número de partículas por unidad de volumen por intervalo de impulso con impulsos entre p y $p + dp$, dado por Ec.(2.23):

$$n(p) = \frac{4\pi g}{h^3} p^2 P(E_p) \quad (2.98)$$

donde g es la degeneración del nivel de energía, $P(E_p)$ es la estadística que obedecen las partículas con densidad $n(p)$, y E_p es la energía cinética de las partículas. Para partículas con masa en reposo m_0 viene dada por Ec.(2.26) por:

$$E_p = E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 .$$

Pero, para los fotones E_p vale

$$E_p = E(p) = pc \tag{2.99}$$

donde c es la velocidad de la luz.

La estadística que obedece un gas de bosones es:

$$P(E_p) = \frac{1}{e^{(E_p - \mu)/kT} - 1} \tag{2.100}$$

Las partículas sin masa pueden tener sólo 2 estados de spin. Luego, para los fotones, la degeneración del nivel de energía g vale:

$$g = 2 \tag{2.101}$$

y hemos visto que el potencial químico de los mismos es $\mu = 0$.

Reemplazando en la Ec.(2.98) las Ecs.(2.100), (2.99), (2.97) y (2.101), obtenemos que el número de partículas con impulso p , en el intervalo de impulsos p y $p + dp$ es:

$$n(p) dp = \frac{8\pi}{h^3} p^2 \frac{1}{e^{pc/kT} - 1} dp. \tag{2.102}$$

Luego, la densidad total de partículas se obtiene integrando a todos los impulsos la Ec.(2.102)

$$n = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 \frac{1}{e^{pc/kT} - 1} dp. \tag{2.103}$$

2.16.2. Presión de un Gas de Fotones

La presión total de un gas de partículas viene dada por Ec.(2.32):

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v(p) n(p) dp$$

donde $n(p)$ es la densidad numérica de partículas que componen el gas por intervalo de impulso dada por la Ec.(2.98), $v(p)$ es la velocidad de las partículas dada por Ec.(2.35):

$$v(p) = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$$

para el caso de partículas con masa m_0 . Para el caso de los fotones es:

$$v(p) = c \tag{2.104}$$

con c , la velocidad de la luz.

Si en la expresión de la presión P reemplazamos las Ecs.(2.102) y (2.104) obtenemos la siguiente expresión para la presión total de un gas de fotones:

$$P = \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^\infty p^3 \frac{1}{e^{pc/kT} - 1} dp. \tag{2.105}$$

2.16.3. Densidad de Energía Cinética de un Gas de Fotones

La densidad de energía cinética de un gas, cuya densidad de partículas viene dada por la Ec.(2.39), es:

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} E(p) n(p) dp$$

donde $E(p)$ es la energía cinética de las partículas del gas dada por Ec.(2.26), si cada una de las mismas tiene una masa m_0 . Para el caso de los fotones, la energía está dada por la Ec.(2.99).

Reemplazando Ecs.(2.102) y (2.99), en esta última ecuación, obtenemos:

$$\varepsilon = \frac{8\pi c}{h^3} \int_0^{\infty} p^3 \frac{1}{e^{pc/kT} - 1} dp. \quad (2.106)$$

A partir de las Ecs.(2.105) y (2.106) podemos ver que vale la siguiente igualdad:

$$P = \frac{1}{3} \varepsilon \quad (2.107)$$

2.16.4. Dependencia de n , P y ε con la Frecuencia

Como es sabido, el valor de la energía cinética para los fotones puede expresarse también en función de la frecuencia ν , es decir:

$$E(\nu) = h\nu \quad (2.108)$$

donde h es la constante de Planck. Por Ecs.(2.99) y (2.108) podemos escribir que:

$$p = \frac{h}{c} \nu \quad (2.109)$$

como consecuencia de esto podemos expresar a la densidad de partículas por intervalo de impulso Ec.(2.102), en función de la frecuencia, usando la Ec.(2.109) (recordemos que $n(p) dp$ es una función distribución para las partículas). Luego:

$$n(\nu) = n(p) \left| \frac{dp}{d\nu} \right|,$$

$$n(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu. \quad (2.110)$$

la Ec.(2.110) es una función distribución, que nos dice cómo depende la densidad de partículas con la frecuencia ν . $n(\nu)$, es el número de partículas por unidad de volumen por intervalo de frecuencia con frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$. Recordemos que para escribir la Ec.(2.102), se consideró isotropía en el impulso p , y como consecuencia hay isotropía en la frecuencia ν .

Por lo tanto, la densidad total de partículas es:

$$n = \int_0^{\infty} n(\nu) d\nu$$

o también

$$n = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^{\infty} \nu^2 \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu. \quad (2.111)$$

Análogamente para la presión total P :

$$P = \frac{1}{3} \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty v^3 \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} dv, \quad (2.112)$$

y para la densidad de energía cinética:

$$\varepsilon = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty v^3 \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} dv. \quad (2.113)$$

Notar que para esta última expresión podemos escribir:

$$\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon(v) dv, \quad (2.114)$$

donde $\varepsilon(v)$ es la densidad de energía cinética por intervalo de frecuencia con frecuencias entre v y $v + dv$. Luego:

$$\varepsilon(v) = \frac{8\pi h}{c^3} v^3 \frac{1}{e^{hv/kT} - 1}. \quad (2.115)$$

Por Ecs.(2.111), (2.112) y (2.113), sólo hay dos integrales que debemos resolver:

$$\int_0^\infty v^2 \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} dv \quad \text{y} \quad \int_0^\infty v^3 \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} dv.$$

Si realizamos el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{hv}{kT} \quad \text{donde} \quad dx = \frac{h}{kT} dv,$$

luego

$$\int_0^\infty v^2 \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} dv = \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \quad (2.116)$$

$$\int_0^\infty v^3 \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} dv = \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (2.117)$$

Las integrales en x se resuelven usando la *Transformada de Mellin* de la siguiente forma:

$$\zeta(n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} dx \quad \text{con} \quad n > 1,$$

o también:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(n) \zeta(n) \quad \text{con} \quad n > 1 \quad (2.118)$$

donde Γ , es la función *Gamma* y se define como:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{con} \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (2.119)$$

y ζ , es la función *Zeta de Riemann* y se define como:

$$\zeta(x) = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^x} \quad (2.120)$$

Luego, usando Ecs.(2.118), (2.119) y (2.120) en (2.116) obtenemos:

$$\int_0^{\infty} v^2 \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} dv = \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \Gamma(3) \zeta(3), \quad (2.121)$$

y haciendo lo mismo en (2.117) obtenemos:

$$\int_0^{\infty} v^3 \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} dv = \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \Gamma(4) \zeta(4). \quad (2.122)$$

con

$$\Gamma(3) = 2 \quad \zeta(3) = 1,20206 \quad \Gamma(4) = 6 \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1,08232 \quad (2.123)$$

reemplazando las Ecs.(2.121), (2.122) y (2.123) en Ecs.(2.111) y (2.112) obtenemos:

$$n = \frac{8\pi}{c^3} \cdot 2 \cdot 1,20206 \left(\frac{kT}{h}\right)^3$$

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{8\pi h}{c^3} \cdot 6 \cdot \frac{\pi^4}{90} \left(\frac{kT}{h}\right)^4$$

o también

$$n \approx 20,287246 \cdot T^3 \text{ [cm}^{-3}\text{]} \quad (2.124)$$

$$P = \frac{1}{3} \frac{8\pi^5}{15} \frac{k^4}{(hc)^3} T^4 \quad (2.125)$$

si definimos la constante de radiación como:

$$a = \frac{8\pi^5}{15} \cdot \frac{k^4}{(hc)^3} = 7,56591(25) \times 10^{-15} \quad [a] = \text{erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4} \quad (2.126)$$

Luego, usando la Ec.(2.126) en (2.125), la ecuación para la presión de radiación es:

$$P = \frac{1}{3} a T^4 \quad (2.127)$$

y la densidad de energía de radiación, usando la Ec.(2.107):

$$\varepsilon = a T^4 \quad (2.128)$$

2.16.5. La Función de Distribución de Planck

La función de distribución de Planck $B_\nu(T)$, está definida a partir de la expresión de la densidad de energía cinética por intervalo de frecuencia con frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$, $\varepsilon(\nu)$, esto es:

$$\varepsilon(\nu) = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) \quad (2.129)$$

donde $\varepsilon(\nu)$ tiene unidades de $\text{erg cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$. La distribución en cambio no tiene la dependencia angular, por eso se separa la isotropía propuesta para los impulsos, o también:

$$B_\nu(T) = \frac{c}{4\pi} \varepsilon(\nu) \quad (2.130)$$

de esta manera podemos expresar la distribución de Planck $B_\nu(T)$, usando la Ec.(2.115) como:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (2.131)$$

Como podemos apreciar las unidades de $B_\nu(T)$ son $\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$, que como es de esperar las mismas unidades de la intensidad específica I_ν . Si integramos a $B_\nu(T)$, Ec.(2.130), a todas las frecuencias obtenemos:

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{c}{4\pi} \int_0^\infty \varepsilon(\nu) d\nu. \quad (2.132)$$

Utilizando la Ec.(2.128) y (2.114) se obtiene la función de Planck integrada, $B(T)$:

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{c}{4\pi} a T^4. \quad (2.133)$$

Definiendo la constante de *Stefan-Boltzmann* σ como:

$$\sigma = \frac{a \cdot c}{4} \quad (2.134)$$

cuyo valor es:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5,67051(19) \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Entonces, en la Ec.(2.133) reemplazamos la Ec.(2.134) :

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T^4. \quad (2.135)$$

Usando en la Ec.(2.135), la definición de σ , Ec.(2.134) y la Ec.(2.128) se obtiene:

$$B(T) = \frac{ac}{4\pi} T^4 = \frac{c}{4\pi} \varepsilon \quad (2.136)$$

la función de Planck integrada en función de la densidad de energía de radiación.

2.17. Bibliografía en el Capítulo

El listado siguiente corresponde a la bibliografía consultada en este capítulo.

Chandrasekhar (1939)

Clayton (1983)

Cox & Giuli (1968)

Cox (2000)

de la Peña (2009)

Hansen & Kawaler (1994)

Huang (1987)

Kippenhahn et al. (2012)

Lang (1980)

Weiss et al. (2004)

Appendices

Apéndice A

Teoremas y Definiciones Matemáticas

Teorema A.1 Teorema de Schwarz

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables definida en una región abierta $D \subset \mathbb{R}^2$. Si en D existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, y además $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ es continua, entonces se cumple que en esa región las derivadas cruzadas de segundo orden son iguales, es decir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \forall (x, y) \in D.$$

□

Apéndice B

Abreviaturas

EDE: Ecuación de Estado

HR: Hertzsprung-Russell

PLT: Primera Ley de la Termodinámica

Q.E.D.: *quod erat demonstrandum*, locución latina que significa lo que se quería demostrar

SLT: Segunda Ley de la Termodinámica

TLT: Tercera Ley de la Termodinámica

Apéndice C

Nomenclatura y Simbología

□: Significa que el teorema no ha sido demostrado.

■: Significa que el teorema ha sido demostrado.

v: vector

f: escalar

Apéndice D

Constantes

Constantes Fundamentales		
c	velocidad de la luz (exacta)	$2,997\,924\,58 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$
$h = 2\pi\hbar$	constante de Planck	$6,626\,075\,5(40) \times 10^{-27} \text{ erg s}$
\hbar	unidad atómica de momento angular	$1,054\,572\,66(63) \times 10^{-27} \text{ erg s.}$
M_u	unidad de masa atómica o UMA ($^{12}\text{C}=12$ escala)	$1,660\,540\,2(10) \times 10^{-24} \text{ g}$
k	constante de Boltzmann	$1,380\,658(12) \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$ $8,617\,385(73) \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
R	constante Universal de los Gases	$8,314\,510(70) \times 10^7 \text{ erg K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ $1,987\,216 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
N_A	número de Avogadro	$6,022\,136\,7(36) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constantes de Radiación		
a	constante de radiación	$7,565\,91(25) \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$
σ	constante de Stefan-Boltzmann	$5,670\,51(19) \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$

Apéndice E

Alfabeto Griego

A	α	alfa	1º letra, equivale a la <i>a</i> en español.
B	β	beta	2º letra, equivale a la <i>b</i> en español.
Γ	γ	gamma	3º letra, equivale al sonido suave de la <i>g</i> castellana.
Δ	δ	delta	4º letra, corresponde a la <i>d</i> castellana.
E	ϵ ε	épsilon	5º letra, <i>e</i> breve del alfabeto griego (psilon: breve).
Z	ζ	zeda	6º letra, nombre de la letra <i>z</i> , equivale a esta letra.
H	η	eta	7º letra, <i>e</i> larga del alfabeto griego, y tercera vocal.
Θ	θ ϑ	theta	8º letra, en latín se representa con <i>th</i> , en castellano con <i>t</i> .
I	ι	iota	9º letra, correspondiente a nuestra <i>i</i> vocal.
K	κ	kappa	10º letra, corresponde a la <i>k</i> .
Λ	λ	lambda	11º letra, corresponde a la <i>l</i> .
M	μ	mu	12º letra, corresponde a la <i>m</i> .
N	ν	nu	13º letra, corresponde a la <i>n</i> .
Ξ	ξ	xi	14º letra, corresponde a la <i>x</i> .
O	o	ómicron	15º letra, (o pequeña) equivale a la <i>o</i> breve.
Π	π ϖ	pi	16º letra, equivale a la <i>p</i> .
P	ρ ϱ	rho	17º letra, equivale a la <i>erre</i> castellana.
Σ	σ ς	sigma	18º letra, equivale a la <i>s</i> .
T	τ	tau	19º letra, corresponde a la <i>t</i> .
Υ	υ	ípsilon	20º letra, (ypsilon) corresponde a la <i>i</i> griega o <i>ye</i> .
Φ	ϕ φ	phi	21º letra, en latín es <i>ph</i> , en castellano es <i>f</i> .
X	χ	ji	22º letra, del griego chi, en latín es <i>ch</i> , en español es <i>c</i> o <i>qu</i> .
Ψ	ψ	psi	23º letra, equivale a la <i>ps</i> .
Ω	ω	omega	24º letra, (o grande) equivale a la <i>o</i> larga.

Bibliografía

- Callen, H. B. 1985, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd Edition
- Chandrasekhar, S. 1939, *An introduction to the study of stellar structure*
- Clayton, D. D. 1968, *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis*
- Clayton, D. D. 1983, *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis*
- Cox, A. N. 2000, *Allen's astrophysical quantities*
- Cox, J. P. & Giuli, R. T. 1968, *Principles of stellar structure*
- de la Peña, L. 2009, *Introducción a la Mecánica Cuántica (Spanish Edition)*
- Fermi, E. 1956, *Thermodynamics*
- Grevesse, N., Asplund, M., Sauval, A. J., & Scott, P. 2010, *Ap&SS*, 328, 179
- Hansen, C. J. & Kawaler, S. D. 1994, *Science*, 265, 1902
- Huang, K. 1987, *Statistical Mechanics*, 2nd Edition
- Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. 2012, *Stellar Structure and Evolution*
- Lang, K. R. 1980, *Astrophysical Formulae. A Compendium for the Physicist and Astrophysicist.*
- Weiss, A., Hillebrandt, W., Thomas, H. C., & Ritter, H. 2004, *Cox and Giuli's Principles of Stellar Structure*