Elementos de Astrofísica Teórica

Lineamientos práctica 5: Transporte radiativo de energía y atmósferas estelares

1. La idea del primer ejercicio es que se repasen los conceptos y propiedades de la intensidad específica y el flujo de radiación, discutidos en las clases teóricas.

2. Para una frecuencia ν, la función de Planck $B(\nu, T)$ está dada por

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_{\rm B}T) - 1}. \tag{1}$$

   a) Para hallar la distribución de Planck en función de la energía, $B(E, T)$, y de la longitud de onda, $B(\lambda, T)$, recordar que no alcanza con reemplazar la variable, sino que hay que tener en cuenta la relación entre las variables. Es decir, la relación que se satisface es:

$$B(\nu)d\nu = B(E)dE = B(\lambda)d\lambda$$

   O sea que

$$B(E) = B(\nu) \left| \frac{d\nu}{dE} \right| B(\lambda) = B(\nu) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right|$$

   b) La temperatura T que aparece en la expresión de la distribución de Planck es equivalente a la temperatura efectiva? Y a la temperatura de color? Justifique.

   c) El límite de Rayleigh-Jeans es una buena aproximación de la distribución de Planck para bajas frecuencias (o longitudes de onda grandes). Para obtenerlo, hacer un desarrollo de Taylor del término $\exp(h\nu/k_{\rm B}T) = \exp(x)$, donde $x \ll 1$.

3. En la teoría se vió que en condiciones de simetría axial en un dado punto del espacio (I_ν independiente del ángulo azimutal), la densidad de energía por unidad de frecuencia u_ν, el flujo F_ν y la presión de la radiación por unidad de frecuencia P_ν pueden obtenerse como los momentos de la intensidad específica respecto al ángulo sólido. Considerando que la única dependencia de la intensidad específica en estas condiciones será con la variable $\mu = \cos\theta$, donde θ es el ángulo zenital, realizar el cambio de variables correspondiente y mostrar que:

$$\begin{aligned} u_\nu &= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\, d\mu \\ F_\nu &= 2\pi \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\, \mu\, d\mu \\ P_\nu &= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\, \mu^2\, d\mu \end{aligned} \tag{2}$$

4. La energía removida al campo de radiación al atravesar un medio con longitud dL y coeficiente de extinción k_ν está dada por:

$$d^7E_\nu = -k_\nu I_\nu d\nu d^2\Omega d^2 S_{\rm N} dt dl.$$

   Utilizando que $d\tau_\nu = -k_\nu dl$, e integrando sobre el ángulo sólido obtenemos:

$$d^5E_\nu = 4\pi J_\nu d\nu d^2S_{\rm N}dtd\tau_\nu.$$

El número de fotones removidos, será la relación entre la energía total removida y la energía de un fotón, $h\nu$. Por lo tanto, obtenemos que el número de fotones absorbidos en todas las direcciones, dentro del intervalo de frecuencias $(\nu, \nu + d\nu)$, por unidad de tiempo y superficie normal, en el intervalo $(\tau_\nu, \tau_\nu + d\tau_\nu)$, está dada por:

$$\frac{d^5E_\nu}{h\nu d\nu d^2S_{\rm N}dtd\tau_\nu} = 4\pi J_\nu.$$

5. Partimos de la ecuación de transporte en el límite de capas planas y paralelas:

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - S_\nu. \tag{3}$$

Dado que queremos hallar una relación entre el momento de orden 1 (F_ν) y el de orden 2 (P_ν), multiplicamos la ecuación por μ e integramos en todo el intervalo:

$$\int_{-1}^{1} \mu \frac{\partial_\nu}{\partial \tau_\nu} d\mu = \int_{-1}^{1} \mu I_\nu d\mu - \int_{-1}^{1} \mu S_\nu d\mu. \tag{4}$$

Si S_ν es isotrópica, se puede ver que el último término es nulo. Identificando los distintos momentos de la intensidad específica se llega a:

$$F_\nu = -\frac{c}{k_\nu}\frac{dP_\nu}{dz}.$$

Nota: justificar que se pueda intercambiar el orden entre la integral y la derivada del primer miembro.

6. Utilizando el ejercicio anterior y considerando una atmósfera gris, demostrar que bajo la aproximación de Eddington vale

$$P_{\rm rad} = \frac{\sigma T_{\rm ef}^4}{c}(\tau + \frac{2}{3}), \qquad T^4 = \frac{3}{4}T_{\rm ef}^4(\tau + \frac{2}{3}). \tag{5}$$

Para una atmósfera gris, podemos integrar el resultado del ejercicio anterior sobre todas las frecuencias, y luego sobre τ, obteniendo:

$$P(\tau) = \frac{F}{c} + P(\tau = 0),$$

donde $P = \int P_\nu d\nu$ y $F = \int F_\nu d\nu$; recordar también que si F es el flujo total, entonces $F = \sigma T_{\rm eff}^4$.

Para obtener la constante de integración $P(\tau = 0)$ utilizaremos el resto de las condiciones del modelo de Eddington. Por un lado, definimos a la intensidad específica en la aproximacion de Eddington según:

$$I(\nu) = \begin{cases} I^+ & \text{si } 0 \le \mu \le 1 \\ I^- & \text{si } -1 \le \mu < 0 \end{cases}$$

Esto nos permitirá obtener los distintos momentos (J, F y P) en función de la intensidad entrante I^- y la saliente I^+ y se las puede evaluar en $\tau = 0$.

Vamos a suponer también que la atmósfera no está irradiada, es decir, la estrella está aislada; esta condición se puede escribir como: $I^{-}(\tau = 0) = 0$.

De esta forma, podremos relacionar el valor de la presión con el de los otros momentos en $\tau = 0$, y utilizando que $F(\tau = 0) = \sigma T_{\rm eff}^4$, llegaremos a la constante que buscamos.

Para obtener la función de la temperatura, utilizaremos dos hipótesis extras:

- Equilibrio radiativo: que en el caso de atmósfera gris resulta en la igualdad $J = S$
- Equilibrio termodinámico local: $S = B(T(\tau)) = \sigma T(\tau)^4/\pi$

7. Según la ecuación de equilibrio hidrostático se tiene que

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)\frac{Gm(r)}{r^2},$$

donde $P = P_{\rm gas} + P_{\rm rad}$. El límite de la Luminosidad de Eddington estará dado por aquel donde toda la presión sea ejercida por la radiación, mientras se mantenga el equilibrio hidrostático, es decir, $P \approx P_{\rm rad}$. De esta forma, podemos usar el resultado del ejercicio anterior para calcular dP/dr.

Por último, recordar que la luminosidad de una estrella está dada por:

$$L_\star = 4\pi R^2 \sigma T_{\rm eff}^4$$

Recordar que las dimensiones de k_ν son inversas de distancia, por lo que este coeficiente suele denominarse opacidad volumétrica. Alternativamente, se define la opacidad específica, κ_ν, tal que $k_\nu = \kappa_\nu \rho$, donde $[\kappa_\nu]$ =cm^2 g^1.

8. *a*) Para hallar la "Solución Formal de la Ecuación de Transporte", partir de la ecuación de transporte en el límite de capas plano-paralelas, multiplicarla por $\exp(-\tau/\mu)$ e integrar en la variable $d\tau$. Dos de los términos que se obtienen al multiplicar por el factor sugerido, podrán reescribirse como la derivada del producto:

$$\frac{d}{d\tau}(\mu I \exp(-\tau/\mu))$$

   b) Bajo la aproximación de que T es constante en el material y la función fuente obedece la función de Planck (i.e. dominan los procesos denominados térmicos) se tiene que $S = cte$.

   - Caso ópticamente delgado: $\tau_2 - \tau_1 \ll 1$ (material casi transparente)
     En este caso se tiene la aproximación $e^{-x} \approx 1$, y resultará $I(\tau_1) \approx I(\tau_2)$. Es decir, la radiación atraviesa el medio sin que se modifique la intensidad específica.
   - Caso ópticamente grueso: $\tau_2 - \tau_1 \gg 1$ (material opaco) En este límite $e^{-x} \approx 0$, y se obtiene $I(\tau_1) \approx S$. Es decir, la intensidad específica entrante es absorbida, y sólo observaré la función fuente del medio.

   c) Realizar la integral de la Solución formal para el caso de una atmósfera seminfinita ($\tau_2 = \infty$ y $\tau_1 = 0$), bajo la suposición de que la función fuente crece linealmente con la profundidad óptica ($S_\nu(\tau_\nu) = a_\nu + b_\nu \tau_\nu$).

9. Utilizar la Solución formal de la ecuación de transporte para obtener la intensidad de la radiación en los distintos puntos. Considere $\mu = 0$.