Elementos de Astrofísica Teórica

Lineamientos Práctica 7: Cosmología Newtoniana

1. En la parte b) de este ejercicio hay que estimar la escala R a la que las energías potencial gravitatoria y la energía en reposo del Universo se igualan. Discutir el valor encontrado.

2. Considere un fluido con una distribución esférica, que ocupa un volumen $V = 4/3\pi r^3$ y con una densidad de energía ρ. La energía total del sistema será

$$U = \frac{\rho 4\pi r^3}{3} = \frac{\rho 4\pi (r_0 a)^3}{3} \tag{1}$$

   Por otro lado, dada la homogeneidad del universo, $T(r) = \text{cte}$, entonces se tiene que $dQ = 0$, por lo que

$$dU = -PdV = -P4\pi r^2 dr \tag{2}$$

   A su vez, para la radiación se cumple que $P = \rho/3$.

   Utilizando estas tres relaciones, más la condición de contorno $a_0 = 1$, se puede mostrar que $\rho_r = \rho_r^0\, a^{-4}$.

3.
   - El caso $\Omega = 1$ se resuleve de manera trivial, utilizando la condición de que existe un $t_0 = 0$ tal que $a(T_0) = a_0 = 0$ en el Big Bang.
   - $\Omega > 1$

     En esta caso la ecuación de Friedmann se puede resscribir como:

$$\frac{da}{dt} = \pm\sqrt{-H_0^2(\Omega - 1) + H_0^2\frac{\Omega}{a}}, \tag{3}$$

     El signo que corresponde a la solución correcta, se puede obtener considerando que hoy ($a_0 = 1$), el universo debe estar en expansión, es decir: $da/dt|_{t_0} > 0$.

     Para resolver la ecuación diferencial que queda, se hace separación de variables y se propone la sustitución:

$$\sin\theta = \left(\frac{a(\Omega - 1)}{\Omega}\right)^{1/2}. \tag{4}$$

   - $\Omega < 1$

     Se plantea algo similar al caso anterior, pero utilizando funciones hiperbólicas en la sustitución, es decir:

$$\sinh^2\theta = \frac{a(1 - \Omega)}{\Omega}. \tag{5}$$

   Graficar a en función de $H_0 t$ e interpretar físicamente.

4. a) Utilizando las dos componentes de la aceleración, la ecuación de Euler quedaría:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - \frac{Gm\vec{r}}{r^3} + \frac{\Lambda\vec{r}}{3}.$$

   Teniendo en cuenta que $\vec{v} = d\vec{r}/dt = \vec{r}\dot{a}/a$, calcular $d\vec{v}/dt$, utilizando:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v}.$$

Ayuda: recordar que la derivada parcial respecto a t es a $\vec{r}$ constante, y que para un universo homogéneo se cumple $\vec{\nabla}P = 0$. La ecuación de Euler queda de la siguiente forma:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-Gm\vec{r}}{r^3} + \frac{\Lambda\vec{r}}{3}.$$

Para ver la estabilidad de la solución, utilizar $m(\vec{r}) = 4/3(ar)^3\rho(t)$, donde $\rho(t) = \rho_0/a^3$, y analizar el signo de $\ddot{\delta(a)}$, ante un cambio en δa.

b) Multiplicar la ecuación obtenida en el inciso anterior por $\dot{a}$.

5. Nuevamente se plantea separación de variables, las sustituciones útiles para resolver la ecuación diferencial son:

$$z = \left(\frac{\Omega_{\mathrm{m}}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} a, \tag{6}$$

y $u = z^{3/2}$.

Finalmente, para los comportamientos asintóticos de la solución, utilizar un desarrollo de Taylor de la función sinh, o la definición de la misma, según corresponda.